Begrænsninger i formelle systemer og sprog

Thomas Bolander

1. september 1999

Indhold

1 Generel introduktion

Denne afhandling består af to dele. Den første del omhandler formelle sprog og begrænsningsresultater for disse sprog, den anden del omhandler formelle systemer og begrænsningsresultater for disse systemer. Hovedresultatet i den første del er Tarskis Teorem og hovedresultatet i den anden del er en generalisering af Gödels Ufuldstændighedsteorem. Der er forsøgt at tilføje lidt nyt til emnet, men dette er naturligvis vanskeligt at opnå i forbindelse med resultater som har haft besøg af så mange prominente matematikere i en så lang årrække som disse resultater af Gödel og Tarski.

Et centralt og gennemgående tema i afhandlingen er Cantors diagonalargument. Samtlige af de begrænsningsresultater vi beviser, opstår ved en anvendelse af diagonalargumentet. Vi demonstrerer desuden den nære sammenhæng som eksisterer imellem diagonalargumentet og de klassiske paradokser i naturlige sprog, og til slut i afhandlingen beviser vi et resultat som viser at diagonalargumentet under meget generelle forudsætninger kan ses som et universelt værktøj til at bevise begrænsningsresultater. Da Cantors diagonalargumentet således er meget centralt har vi valgt at vie nogle sider i afhandlingens begyndelse til at se på dets historiske rødder. Efter dette gives en generel formulering af diagonalargumentet, og denne formulering benyttes som grundlaget for en diskussion af Russells paradoks.

I kølvandet på diskussionen af Russells paradoks følger definitionen af det sprogbegreb som resten af afhandlingen benytter sig af. En del energi er brugt på at angive motivationerne bag den fremkomne definition. Det definerede sprogbegreb er en generalisering og en abstraktion af de formelle sprog man sædvanligvis møder i matematisk logik. Da vi i denne afhandlings sprogbegreb ikke binder sprogenes semantik op til modelbegrebet, får vi åbnet muligheden for blandt andet at konstruere sprog som inkorporerer direkte selvreference, idet vi kan operere med udtryk som "denne sætning" med en konteksafhængig betydning. Samtidig tillader vi i vores sprogbegreb at et sprog kan indeholde sætninger som hverken er sande eller falske. Dette giver mulighed for i sprogene at håndtere kritiske semantiske begreber som begrebet "heterologisk" og begrebet "sandhed" uden at der opstår paradokser, idet vi da blot kan tillade den selvrefererende sætning som producerer paradokset hverken at være sand eller falsk i sproget. Efter indførslen af sprogbegrebet fortsætter afhandlingen med en detaljeret behandling af Grellings og Epimenides' paradokser i rammen af det nye sprogbegreb. Første del af afhandlingen afsluttes derefter med en abstraheret udgave af Tarskis Teorem og en anvendelse af dette teorem på formel prædikatlogisk aritmetik, hvilket giver os det klassiske Tarski-teorem.

Anden halvdel af afhandlingen starter med at definere begrebet formelt system som et formelt sprog udstyret med et bevisbarhedsbegreb for sproget. Derefter diskuteres hvilke egenskaber et bevisbarhedsbegreb i et formelt system skal have for at kunne stemme overens med vores intuition om hvad beviser er. Vi når frem til at hvis et bevis skal være noget endegyldigt og uomtvisteligt, og ikke blot et "overbevis", da må enhver kandidat til et bevis på systematisk, mekanisk måde kunne checkes for fejl. At noget kan udføres på systematisk, mekanisk måde vælger vi at præcisere ved kravet om at det kan udføres på en computer. Dette præciseres dernæst videre ved at indføre programmeringssproget `while`. I afsnittet "Gödels Ufuldstændighedsteorem" vises det at sproget for formel prædikatlogisk aritmetik indeholder sande sætninger som ikke kan bevises, dvs. er *ufuldstændigt*, hvis det er udstyret med et bevisbarhedsbegreb som opfylder ovennævnte krav om mekanisk "bevis-checkbarhed". Dette begrænsningsresultat baserer sig blandt andet på Tarskis Teorem. I afhandlingens sidste afsnit generaliseres ufuldstændighedsresultatet og der ses nærmere på hvor og hvordan ufuldstændigheden viser sig i de ufuldstændige formelle systemer.

Af den tid der er brugt på at skrive afhandlingen er i nærheden af halvdelen af tiden brugt på at finde de rette definitioner. I denne type matematik, der er rettet mod grundlagsmatematiske og filosofiske problemstillinger, er det ikke altid definitionerne byder sig til på lige så oplagt måde som i visse andre dele af matematikken. Værdien af de opnåede resultater står naturligvis og falder med det intuitivt naturlige i definitionerne, men ofte kan det vise sig at de definitioner som forekommer intuitivt naturlige giver anledning til væsentligt mere kompliceret notation og tekniske beviser end andre tilnærmede definitioner, der er skabt for at få matematikken til at glide så glat som muligt, men hvor det intuitive i definitionerne er sværere at få øje på. Der er således ofte et trade-off imellem det intuitive i en definition og definitionens håndterbarhed, og dette trade-off har vi i denne afhandling med stort besvær forsøgt at balancere så godt som muligt. De i afhandlingen indførte begreber er forsøgt defineret så generelt som muligt for at opnå de mest generelle resultater. Prisen for dette er en lidt mere tung notation og lidt mere tekniske beviser end det man ellers kunne have klaret sig med. Belønningen er så til gengæld at man ser at de viste begrænsningsresultater holder under meget generelle forudsætninger, og ikke kun er resultater bundet til meget specialiserede typer af sprog og systemer (som for eksempel 1. ordens systemer, som er det klassiske tilfælde).

I den første del af afhandlingen forekommer der kun meget lidt teknisk matematik. Vægten er her ikke lagt på det tekniske men på diskussionerne og det forståelsesmæssige. Disse dele bør læses med et mere filosofisk end matematisk blik. Senere i afhandlingen begynder den matematiske sværhedsgrad at stige—dels fordi de viste resultater vokser i kompleksitet og dels fordi graden af detaljerigdom i beviserne bevidst er gjort aftagende igennem afhandlingen.

Efter hvert afsnit i afhandlingen er der en paragraf kaldet "Bemærkninger og referencer". I denne paragraf står der blandt andet i hvilken grad afsnittets resultater og overvejelser er lånte eller mine egne. De beviste resultater er i overvejende grad varianter eller generaliseringer af allerede kendte resultater, men ingen er helt identiske med formuleringer i den af forfatteren kendte del af litteraturen. Alle beviser er forfatterens egne, hvor de grundlæggende idéer kan være lånte, men hvor den konkrete gennemførsel af beviserne, detaljerne, er forfatterens. Et enkelt større resultat hen imod slutningen af afhandlingen (Teorem 78) er så vidt vides (af forfatteren og logik-miljøet i Oslo) ikke tidligere kendt.

2 Matematisk introduktion

Den generelle matematiske ramme vi i det følgende skal arbejde indenfor er ZF, Zermelo-Fraenkels aksiomatiske mængdelære. Vi vil ikke forsøge at gå rent formelt til værks når vi konstruerer beviser—dette har vi valgt for at gøre beviserne mere elegante og læsbare, men i princippet burde der kunne gives formelle varianter af alle beviserne. Vi antager altså at alt bliver bygget op fra Zermelo-Fraenkels aksiomer, og alle objekter vi måtte ønske at definere skal være mængder i ZF-forstand. Resten af dette afsnit vil vi benytte til i ZF at introducere de fundamentale begreber, som ligger til grund for denne afhandling.

På sædvanlig måde i ZF lader vi mængden af naturlige tal, $\mathbb{N}$, være den mindste grænseordinal. $\mathbb{N}$ bliver således mængden

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$
$$\text{hvor } 0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, 3 = \{0, 1, 2\}, \dots$$

Ønsker vi i en formel at kvantificere over mængden af naturlige tal skriver vi $\forall x \in \mathbb{N}$ eller $\exists x \in \mathbb{N}$ mens $\forall x$ og $\exists x$ betyder at vi kvantificerer over *alle* mængder.

Vi indfører begrebet **endelig følge**. En endelig følge har et antal elementer $n \in \mathbb{N}$. Det eneste endelige følge med 0 elementer er den tomme mængde $\emptyset$. Vi skriver også $()$ for denne følge. En endelig følge med 1 element (x_1) defineres ganske simpelt som elementet x_1 selv. En endelig følge med 2 elementer (x_1, x_2) defineres som mængden $\{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$. En sådan følge kaldes også et **par**. En **endelig følge** med $n > 2$ elementer $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ defineres som mængden af par

$$\{(0, x_1), (1, x_2), \dots, (n-1, x_n)\}.$$

Hvis σ er givet at være en endelig følge, vil vi i resten af afhandlingen lade udtryk af typen $x \in \sigma$ betyde $x = x_i$ for en $i \in \{1, \dots, n\}$ hvor $\sigma = (x_1, \dots, x_n)$. Hvis $\sigma = (x_1, \dots, x_n)$ og $\tau = (y_1, \dots, y_n)$ er to endelige følger vil vi tilsvarende tillade os at benytte udtrykket $\sigma \subseteq \tau$ som en betegnelse for egenskaben

$$\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \{y_1, \dots, y_n\}.$$

Udtrykket $\sigma\tau$ benytter vi til at betegne den endelige følge

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$$

og for alle $i = 1, \dots, n$ lader vi σ_i betegne det i'te element i σ, dvs. $\sigma_i = x_i$.

En **n-plads relation** er er en mængde af endelige følger, alle med n elementer. Bemærk at som vi har defineret begrebet endelig følge med 1 element bliver begrebet 1-plads relation identisk med begrebet mængde. Hvis R er en n-plads relation skriver vi ofte $R(x_1, \dots, x_n)$ istedet for $(x_1, \dots, x_n) \in R$. Lad $M_1, \dots, M_n$ være mængder. Vi definerer $M_1 \times \dots \times M_n$ som n-plads relationen

$$M_1 \times \dots \times M_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in M_i \text{ for alle } i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Hvis $M = M_1 = M_2 = \dots = M_n$ skriver vi også M^n for denne relation. M^0 er 0-plads relationen $\{()\}$. Hvis der for en n-plads relation R gælder $R \subseteq M_1 \times \dots \times M_n$, kalder vi R for en **n-plads relation på** $M_1 \times \dots \times M_n$. Hvis der for en n-plads relation R gælder $R \subseteq M^n$ kalder vi R for en **n-plads relation over** M. Enhver $(n+1)$-plads relation har en **definitionsmængde**

$$\mathrm{dom}(R) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \exists y\, ((x_1, \dots, x_n, y) \in R)\}$$

og en **billedmængde**

$$\mathrm{ran}(R) = \{y \mid \exists x_1, \dots, x_n\, ((x_1 \dots, x_n, y) \in R)\}$$

En $(n+1)$-plads relation f kaldes en **funktion** eller en **afbildning** hvis der gælder

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{dom}(f) \exists! y \in \mathrm{ran}(f) ((x_1, \dots, x_n, y) \in f).$$

Vi benytter skrivemåden $f : A \to B$ til at angive at f er en afbildning med $\mathrm{dom}(f) = A$ og $\mathrm{ran}(f) \subseteq B$. Lad f være en afbildning og lad $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{dom}(f)$. Vi benytter udtrykket $f(x_1, \dots, x_n)$ til at betegne den entydige $y \in \mathrm{ran}(f)$ som opfylder $(x_1, \dots, x_n, y) \in f$. Der gælder således

$$f(x_1, \dots, x_n) = y \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n, y) \in f.$$

Da vi som nævnt ofte vil benytte skrivemåden $f(x_1, \dots, x_n, y)$ fremfor at skrive $(x_1, \dots, x_n, y) \in f$ må man være forsigtig med ikke at forveksle udtrykkene $f(x_1, \dots, x_n)$ og $f(x_1, \dots, x_n, y)$.

En mængde

$$\{(0, x_1), (1, x_2), \dots, (n-1, x_n)\}$$

er per definition både en endelig følge med n elementer og en funktion med definitionsmængde $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. En funktion f med definitionsmængde $\mathbb{N}$ kaldes også en **uendelig følge** og vi benytter skrivemåden $f = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ til at betegne at $f(i) = x_i$. Lad $f : A \to B$ være en afbildning og lad C være en mængde. Ved **restriktionen** af f til C forstår vi afbildningen $f \restriction C$ givet ved

$$\forall x \forall y \big((x, y) \in f \restriction C \leftrightarrow x \in C \wedge (x, y) \in f\big).$$

Vi har altså

$$\mathrm{dom}(f \restriction C) = \mathrm{dom}(f) \cap C.$$

Et n-**plads prædikat** P er et par $P = (A, B)$ hvor A og B er n-plads relationer med $B \supseteq A$. Et n-**plads prædikat over** M er et n-plads prædikat $P = (A, B)$ hvor A og B begge er n-plads relationer over M. Mængden af n-plads prædikater over en mængde M betegnes $M^{[n]}$. Givet et n-plads prædikat $P = (A, B)$ definerer vi $E(P) = A$ og $M(P) = B$. $E(P)$ kaldes prædikatets **ekstension** og $M(P)$ kaldes dets **meningsområde**. Hvis $P = (A, B)$ siger vi også at P er relationen A **udstyret med meningsområde** B.

Eksempel 1. Mængden af primtal udgør en 1-plads relation A. A kan udstyres med meningsområde $\mathbb{N}$ hvorved vi får et 1-plads prædikat $P = (A, \mathbb{N})$. P er et 1-plads prædikat over $\mathbb{N}$. Vi ønsker at benytte prædikater til at betegne egenskaber. I dette tilfælde betegner prædikatet P egenskaben at være et primtal. Meningsområdet benyttes til at angive for hvilke mængder egenskaben "giver mening". Egenskaben at være et primtal giver i klassisk forstand kun mening for de naturlige tal. Derfor lader vi $M(P) = \mathbb{N}$.

De her nævnte ting udgør den underliggende intuition for brugen af n-plads prædikater i det følgende.

Lad A og B være to mængder. **Mængdedifferensen** imellem A og B betegnes $A - B$. Ved den **symmetriske differens** af A og B forstås mængden $A \ominus B$ givet ved

$$A \ominus B = (A - B) \cup (B - A).$$

$A \ominus B$ består altså af de elementer som er indeholdt i netop én af mængderne A, B.

En mængde A kaldes **endelig** hvis der eksisterer en injektion $A \to \mathbb{N}$ men ingen bijektion $A \to \mathbb{N}$. A kaldes **tællelig** hvis der eksisterer en bijektion $A \to \mathbb{N}$.[1] A kaldes **overtællelig** hvis der eksisterer en injektion $\mathbb{N} \to A$ men ingen bijektion $\mathbb{N} \to A$. Heraf følger det at en tællelig mængde hverken kan bringes i bijektiv korrespondance med nogen endelig eller nogen overtællelig mængde. En mængde kaldes **højst tællelig** hvis den enten er endelig eller tællelig. En mængde kaldes **uendelig** hvis den enten er tællelig eller overtællelig.

Bemærkninger og referencer De første definitioner i dette afsnit er taget fra [Kun80]. Jeg har bevidst undgået at benytte kardinalitetsbegrebet til at definere begreberne endelig, tællelig og overtællelig mængde, da jeg således undgår at bringe udvalgsaksiomet på banen. Udvalgsaksiomet er ikke nødvendigt for de "mægtigheds"-betragtning vi får brug for i det følgende. Begrebet prædikat er mit eget, som senere skal benyttes i forbindelse med mit sprogbegreb til semantisk at håndtere sætninger hvori et begreb benyttes udenfor dets naturlige meningsområde.

[1] I en del andre fremstillinger kaldes en mængde A tællelig blot der eksisterer en injektion $A \to \mathbb{N}$.

3 Cantors diagonalargument

Alt vi skal beskæftige os med i det følgende tager udgangspunkt i et argument som Georg Cantor (1845-1918) oprindelig benyttede for at bevise eksistensen af overtællelige mængder. Dette argument er i dag kendt under navnet *Cantors diagonalargument.* Argumentet optræder første gang i "Jahresbericht der Deutsch. Math. Vereing." fra 1891 ([Can32]). Allerede i 1874 beviste Cantor eksistensen af en overtællelig mængde ved at bevise overtælleligheden af de reelle tal, men det i den forbindelse benyttede bevis er unødigt kompliceret og angiver ikke umiddelbart en universel metode som diagonalargumentet gør. Diagonalargumentet er hjertet i alle de begrænsningsresultater som vi senere i denne afhandling skal have på banen. I Gödels Ufuldstændighedsteorem fra 1931 er diagonalargumentet fra 1891 en af bevisets største "geniale idéer", mens en stor del af beviset blot består af mere eller mindre trivielle, omend dog ganske omstændelige, tekniske pillerier. Vi skal senere gennemføre forskellige beviser for Gödels Ufuldstændighedsteorem, hvor dette vil blive tydeligt.

Da diagonalargumentet er centralt for alt i det følgende vil vi bruge en del energi på at fremstille det i detaljer. Vi vil begynde med at angive Cantors oprindelige diagonalargument, som det så ud i "Jahresbericht der Deutsch. Math. Vereing.", hvorefter vi vil prøve at oversætte beviset til moderne notation og give en variant som er passende for de senere anvendelser i denne afhandling.

> Sind ... m und w irgend zwei einander ausschließende Charaktere, so betrachten wir einen Inbegriff[2] M von Elementen
>
> $$E = (x_1, x_2, \dots, x_v, \dots),$$
>
> welche von unendlich vielen Koordinaten $x_1, x_2, \dots, x_v, \dots$ abhängen, wo jede dieser Koordinaten entweder m oder w ist. M sei die Gesamtheit aller Elemente E.
>
> Zu den Elementen von M gehören beispielsweise die folgenden drei:
>
> $$\begin{aligned} E^I &= (m, m, m, m, \dots), \\ E^{II} &= (w, w, w, w, \dots), \\ E^{III} &= (m, w, m, w, \dots). \end{aligned}$$
>
> Ich behaupte nun, daß eine solche Mannigfaltigkeit M nicht die Mächtigkeit der Reihe $1, 2, \dots, \nu, \dots$ hat.
>
> Dies geht aus folgendem Satze hervor:

[2]En af Cantors betegnelser for det vi i dag kalder en mængde.

"Ist $E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$ irgendeine einfach unendliche Reihe von Elementen der Mannigfaltigkeit[3] M, so gibt es stets ein Element E_0 von M, welches mit keinem E_ν übereinstimmt."

Zum Beweise sei

$$\begin{array}{lcl} E_1 & = & (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,\nu}, \ldots), \\ E_2 & = & (a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,\nu}, \ldots). \\ \multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ E_\mu & = & (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \ldots, a_{\mu,\nu}, \ldots). \\ \multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \end{array}$$

Hier sind $a_{\mu,\nu}$ in bestimmter Weise m oder w. Es werde nun eine Reihe $b_1, b_2, \ldots, b_\nu, \ldots$, so definiert, daß b_ν auch nur gleich m oder w und von $a_{\nu,\nu}$ *verschieden* sei.

Ist also $a_{\nu,\nu} = m$, so ist $b_\nu = w$, und ist $a_{\nu,\nu} = w$, so ist $b_v = m$.

Betrachten wir alsdann das Element

$$E_0 = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

von M, so sieht man ohne weiteres, daß die Gleichung

$$E_0 = E_\mu$$

für keinen positiven ganzzahligen Wert von μ erfüllt sein kann, da sonst für das betreffende μ und für alle ganzzahligen Werte von ν

$$b_\nu = a_{\mu,\nu},$$

also auch im besondern

$$b_\mu = a_{\mu,\mu}$$

wäre, was durch die Definition von b_ν ausgeschlossen ist. Aus diesem Satze folgt unmittelbar, daß die Gesamtheit aller Elemente von M sich nicht in die Reihenform: $E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$ bringen läßt, da wir sonst vor dem Widerspruch stehen würden, daß ein Ding E_0 sowohl Element von M, wie auch nicht Element von M wäre.[4]

Cantor beviser ovenfor at mængden M af uendelige følger på en mængde $\{m, w\}$ er overtællelig, dvs. ikke lader sig bringe i bijektiv korrespondance med de naturlige tal. Han beviser dette ved at vise

[3]Endnu en af Cantors betegnelser for det vi i dag kalder en mængde.
[4][Can32], s. 278-279.

Lemma 2. *For enhver uendelig følge* $(E^1, E^2, \ldots, E^\nu, \ldots)$ *af elementer fra* M *eksisterer der et element* $E^0 \in M$ *som ikke er med i den uendelige følge.*

Deraf følger at M ikke kan være tællelig, for ellers kunne vi putte alle elementerne fra M ind i den uendelige følge (via en bijektiv afbildning $\mathbb{N} \to M$), og da ville der ikke kunne eksistere en $E^0 \in M$ som ikke var element i følgen.

Lad os bevise lemmaet. ***Bevis*** Vi definerer først en inverteringsafbildning $\bar{\cdot} : \{m, w\} \to \{m, w\}$ som afbilder m på w og omvendt, dvs.

$$\overline{\sigma} = \begin{cases} m & \text{hvis } \sigma = w \\ w & \text{hvis } \sigma = m \end{cases}$$

Hvis E betegner en uendelig følge og $\nu \in \mathbb{N} - \{0\}$ vil vi på sædvanlig måde lade E_ν betegne det ν'te element i E. Vi ser da på følgende skema

$$\begin{array}{lclcccccc} E^1 & = & (& E^1_1, & E^1_2, & \ldots, & E^1_\nu, & \ldots &), \\ E^2 & = & (& E^2_1, & E^2_2, & \ldots, & E^2_\nu, & \ldots &). \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ E^\nu & = & (& E^\nu_1, & E^\nu_2, & \ldots, & E^\nu_\nu, & \ldots &). \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \ddots & \end{array}$$

Det er fra dette skema at navnet *diagonal*-argument opstår, for det vi nu skal se på er *diagonalen* i skemaet, dvs. følgen $(E^1_1, E^2_2, \ldots, E^\nu_\nu, \ldots)$. Hvis vi inverterer alle elementerne i denne følge får vi en følge som vi vil kalde for **antidiagonalen** og som vi her betegner E^0. E^0 er altså følgen

$$E^0 = (\overline{E^1_1}, \overline{E^2_2}, \ldots, \overline{E^\nu_\nu}, \ldots)$$

Antag nu at E^0 er med i følgen $(E^1, E^2, \ldots, E^\nu, \ldots)$, dvs. antag $E^0 = E^\mu$ for en positiv $\mu \in \mathbb{N}$. Da vil specielt gælde

$$E^0_\mu = E^\mu_\mu$$

med dette er i modstrid med vores definition af E^0 ifølge hvilken $E^0_\mu = \overline{E^\mu_\mu} \neq E^\mu_\mu$. $\square$

Pointen med E^0 ovenfor er at dens ν'te element vha. inverteringsafbildningen defineres til at være forskellig fra E^ν's ν'te element. Dermed kan E^0 ikke være lig nogen af E^ν'erne, da E^0 for et hvilket som helst givet positivt ν vil afvige fra E^ν på de to følgers ν'te plads.

I resten af afhandlingen vil vi fokusere på mængder fremfor på følger, så vi vil nu konstruere en mængdevariant af ovenstående lemma. Dette ligger lige for, idet vi har følgende oplagte isomorfi $o : M \to \mathcal{P}(\mathbb{N} - \{0\})$ imellem mængden af uendelige følger på $\{m, w\}$ og delmængderne af $\mathbb{N} - \{0\}$:

$$o(E) = \{\nu \mid E_\nu = m\}$$

Det er let at se at o således defineret er en bijektion. Via o får vi nu udfra Lemma 2 et bevis for følgende resultat

Lemma 3. *Lad E være en tællelig delmængde af $\mathcal{P}(\mathbb{N}-\{0\})$. Da findes der et element i $\mathcal{P}(\mathbb{N}-\{0\})$ som ikke er med i E.*

Bevis Da E er tællelig eksisterer der en bijektion $I : (\mathbb{N}-\{0\}) \to E$. Definér nu for alle $\nu \in \mathbb{N}-\{0\}$ en uendelig følge E^ν ved

$$E^\nu = o^{-1}(I(\nu))$$

$(E^1, E^2, \dots)$ er en tællelig følge af elementer fra M, og har derfor en antidiagonal

$$E^0 = \left(\overline{E^1_1}, \overline{E^2_2}, \dots, \overline{E^\nu_\nu}, \dots\right)$$

som ikke er med i følgen E, ifølge beviset for Lemma 2. Ser vi nu på antidiagonalens billede under isomorfien o fås, idet vi undervejs benytter at $o(E^\nu) = \{i \mid E^\nu_i = m\}$ og dermed $i \in o(E^\nu) \Leftrightarrow E^\nu_i = m$,

$$\begin{aligned} o(E^0) = o\left((\overline{E^1_1}, \overline{E^2_2}, \dots)\right) &= \left\{\nu \mid \overline{E^\nu_\nu} = m\right\} = \{\nu \mid E^\nu_\nu \neq m\} \\ &= \{\nu \mid \nu \notin o(E^\nu)\} = \{\nu \mid \nu \notin I(\nu)\}\,. \end{aligned}$$

$o(E^0)$ kalder vi af gode grunde også for en antidiagonal, da det blot er en mængdeparallel til antidiagonalen for følger, som opstår igennem den kanoniske isomorfi o. Men det er let at se at denne antidiagonal ikke er med i E. Antager vi nemlig at $o(E^0) = I(\mu)$ for en $\mu \in \mathbb{N}-\{0\}$ fås

$$\mu \in I(\mu) \Leftrightarrow \mu \in o(E^0) \Leftrightarrow \mu \notin I(\mu)$$

hvilket klart er en modstrid. $\square$

At vi ovenfor ser på delmængder af $\mathbb{N}-\{0\}$ fremfor delmængder af $\mathbb{N}$ er blot et valg foretaget for at få den simplest mulige isomorfi o imellem følger og mængder. Hvis vi lader $p : (\mathbb{N}-\{0\}) \to \mathbb{N}$ betegne bijektionen $n+1 \curvearrowright n$ og i ovenstående bevis overalt erstatter afbildningen o med afbildningen $p \circ o$ får vi istedet et bevis gældende for delmængder af $\mathbb{N}$.

Et oplagt korollar af lemmaet er at mængden $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ikke er tællelig.

At bevise at mængden $\{\nu \mid \nu \notin I(\nu)\}$ ikke er med i $\mathrm{ran}(I)$ ses af ovenstående at være ganske let at gøre, og vi behøver slet ikke at gå via følger for at gennemføre beviset for ovenstående lemma. Men det vi har opnået ved umagen er at få knyttet en historisk kontakt tilbage til Cantors oprindelige diagonalargument—vi har set hvordan idéen til at konstruere mængden $\{\nu \mid \nu \notin I(\nu)\}$ er opstået, og vi har fået forklaret navnet *antidiagonalen* på denne mængde.

Vi får senere i afhandlingen brug for følgende lidt generaliserede version af ovenstående lemma.

Lemma 4. *Lad der være givet to mængder $A \subseteq B$ og en afbildning $I : A \to \mathcal{P}(B)$. Da indeholder mængden $\mathcal{P}(A) - I(A)$ følgende element*

$$\overline{\Delta}_I = \{x \in A \mid x \notin I(x)\}\,.$$

Bevis Nu kan vi komme med et fint og meget enkelt diagonalargument. Antag $\overline{\Delta}_I \in I(A)$, dvs. antag $\overline{\Delta}_I = I(e)$ for en $e \in A$. Da fås

$$e \in I(e) \Leftrightarrow e \in \overline{\Delta}_I \Leftrightarrow e \notin I(e)$$

hvilket er en modstrid. Derfor gælder $\overline{\Delta}_I \notin I(A)$, og det er samtidig trivielt at $\overline{\Delta}_I \in \mathcal{P}(A)$. $\square$

Dette generaliserede lemma giver forrige lemma ved at lade

$$A = B = \mathbb{N} - 0$$

og som før lade I være en bijektion $I : (\mathbb{N} - \{0\}) \to E$. Da giver det generaliserede lemma at

$$\mathcal{P}(A) - I(A) = \mathcal{P}(\mathbb{N} - 0) - E$$

er ikke-tom.

I det følgende vil vi med udtrykket "antidiagonalen mht. I" altid forstå mængden $\overline{\Delta}_I$ defineret ved

$$\overline{\Delta}_I = \{x \in \mathrm{dom}(I) \mid x \notin I(x)\}\,.$$

Tilsvarende benytter vi udtrykket "diagonalen mht. I" for mængden Δ_I defineret ved

$$\Delta_I = \{x \in \mathrm{dom}(I) \mid x \in I(x)\}\,.$$

De to mængder $\overline{\Delta}_I$ og Δ_I er tydeligvis hinandens komplementære i $\mathrm{dom}(I)$, som også valget af symboler antyder.

Nu har vi fået vandret rigeligt rundt i diagonalargumentet, og kan gå videre med anvendelserne.

Bemærkninger og referencer At uddraget i begyndelsen af afsnittet er litteraturens første diagonalargument bliver hævdet i [Mes67], hvor det i øvrigt også bliver bemærket at dette er det eneste sted i Cantors samlede værker at et diagonalargument optræder. Bortset fra uddraget er alle detaljer i dette afsnit mine egne. Jeg kender ikke til at andre benytter udtrykket "antidiagonal", men det giver nogenlunde sig selv hvad dette udtryk dækker over.

4 Russells paradoks

I dette afsnit vil vi se nærmere på en historisk set central anvendelse af diagonalargumentet. Her, som i de følgende afsnit, vil en anvendelse af diagonalargumentet betyde en anvendelse af Lemma 4, som er vores generelle formulering af hvad der kommer ud af et diagonalargument.

Med diagonalargumentet fik Cantor intetanende lagt en bombe under sit eget mængdebegreb, og dermed under hele det arbejde han havde præsteret indenfor sin mængdelære. Bomben fik lov at ligge ubemærket i 12 år, indtil Bertrand Russell (1872-1970) i 1903 bragte den til sprængning med sit berømte paradoks. Vi vil i det følgende se på hvordan Russells paradoks opstår, men først må vi definere et par begreber.

I forbindelse med indførslen af ordinaltal i mængdelæren definerer man begrebet "transitiv mængde". En mængde M kaldes **transitiv** hvis ethvert element i M er en delmængde af M, dvs. hvis

$$\forall x\,(x \in M \rightarrow x \subseteq M)\,.$$

For en transitiv mængde gælder altså $M \subseteq \mathcal{P}(M)$. Eksempler på transitive mængder er $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ og $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Er A en transitiv mængde kan vi som en afbildning af typen $A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ vælge inklusionsafbildningen $\subset_A : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ givet ved $\subset_A(x) = x$. Da får vi af Lemma 4, ved at lade $I = \subset_A$, at

$$\overline{\Delta}_{\subset_A} \in \mathcal{P}(A) - \subset_A(A).$$

Da $\subset_A(A) = A$ får vi heraf

$$\overline{\Delta}_{\subset_A} \notin A$$

hvor

$$\overline{\Delta}_{\subset_A} = \{x \in A \mid x \notin \subset_A(x)\} = \{x \in A \mid x \notin x\}\,.$$

Vi har nu bevist følgende

Lemma 5. *For enhver transitiv mængde A er delmængden af A givet ved*

$$\overline{\Delta}_{\subset_A} = \{x \in A \mid x \notin x\}$$

ikke element i A.

Vi vil nu vise at ovenstående lemma er inkonsistent med Cantors mængdebegreb (naiv mængdelære). Som man kunne se af uddraget i Afsnit 3's begyndelse benyttede Cantor i sine tidlige skrifter flere forskellige betegnelser for begrebet mængde. Disse betegnelser havde et intuitivt indhold, men var på dette tidspunkt ikke givet nogen definition. Først i 1895 (Math. Annalen Bd. 46, s. 481-512. Se [Can32]) gav Cantor følgende "definition" på mængdebegrebet:

> Unter einer "Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die "Elemente" von M gennant werden) zu einem Ganzen.

Lad os nu se på "Zusammenfassung" 'en af *alle* mængder. Denne samling udgør i sig selv en mængde A, hvis vi følger det af Cantor intenderede mængdebegreb.[5] Det er klart at A således defineret må være transitiv, og dermed får vi ifølge ovenstående lemma at mængden

$$\overline{\Delta}_{\subset A} = \{x \mid x \notin x\}$$

ikke er element i A, hvilket er i modstrid med at A består af *alle* mængder. Mængden $\overline{\Delta}_{\subset A}$ er Russell-mængden: "mængden af alle mængder som ikke indeholder sig selv". Denne mængde har vi nu fået udtrykt som antidiagonalen mht. inklusionsafbildningen på mængden af alle mængder—og som vi ser leder eksistensen af denne mængde til et paradoks i Cantors mængdelære.

Opdagelsen af Russells paradoks var naturligvis et hårdt slag for matematikken—noget som pludselig gjorde det klart at matematikken ikke var opbygget på et så solidt og ufejlbarligt grundlag som man måske på det pågældende tidspunkt troede. På grund af paradokset måtte man forsøge at genopbygge mængdelæren på et fastere grundlag end den naive mængdelære var. Dette resulterede i en eksplosiv udvikling af den matematiske logik i forsøget på at formalisere mængdelæren. Pointen var at konstruere en formel teori for mængdelæren som så vidt muligt skulle stemme overens med den naive mængdelære, men som samtidig måtte være konsistent, dvs. ikke give anledning til eksistensen af en Russell-mængde.

Der blev konstrueret en del formelle teorier som på forskellig måde klarede at unddrage sig Russells paradoks. En af disse teorier var Russells type-teori, som blev lagt til grund for Russell og Whiteheads mammutværk "Principia Mathematica" (1910-1913). I Principia Mathematica blev en god del af den allerede kendte matematik overført til den formelle type-teoretiske ramme. Det endegyldige mål var at få hele den kendte matematik overført til den formelle ramme, og at alle fremtidige matematiske resultater skulle formuleres i denne ramme og bevises formelt deri. Dette skulle da give den nødvendige paradoksfrie genopbygning af matematikken.

Det kom ikke helt til at gå med Principia Mathematica-projektet som man havde håbet. I 1931 offentliggjorde Kurt Gödel (1906-1978) et resultat som viste at alle formelle systemer som er mindst lige så ambitiøse som Russells typeteori vil være mangelfulde, i den forstand at de enten vil være inkonsistente eller kunne udtrykke sætninger som hverken kan bevises eller modbevises, dvs. er uafgørbare, indenfor teorien. Dette resultat viste at der

[5] At Cantor virkeligt med det her givne mængdebegreb ønskede at samlingen af alle mængder i sig selv skulle udgøre en mængde, kan vi blandt andet se af den bekymring Cantor i breve udtrykte overfor Russells paradoks, da det kom frem.

ikke eksisterer nogen konsistent formel teori som kan bevise alle "sande" matematiske teoremer, og dermed konkluderede man at håbet om at kunne genopbygge hele matematikken i en formel teori måtte opgives. Denne forholdsvis vidtgående konklusion på basis af Gödels opdagelse blev draget, da det på det pågældende tidspunkt syntes oplagt at alle sande matematiske udsagn måtte kunne bevises *på en eller anden måde*, men altså ikke igennem formelle beviser. I dag kan vi måske bedre forestille os at der kan eksistere nogle klasser af problemer som er *essentielt* uafgørbare, dvs. ikke lader sig afgøre (bevises eller modbevises) i nogen som helst sund ramme, hverken en formel ramme eller rammen af sædvanlig matematisk praksis. I dette tilfælde giver Gödels resultat i sig selv ingen grund til at forlade formelle teorier, da en hvilken som helst sund fremgangsmåde da vil besidde den påviste begrænsning.

Resultatet Gödel beviste kaldes for Gödels Ufuldstændighedsteorem eller Gödels Uafgørbarhedsteorem. I beviset for dette teorem var det igen en anvendelse af diagonalargumentet som var på spil. I hjertet af beviset lå konstruktionen af en antidiagonal $\overline{\Delta}_I$ og en tilhørende formel $\varphi_{\overline{\Delta}_I}(x)$ som blev bevist at have en uafgørbar instans. Vi skal se nærmere på detaljerne for dette bevis i afsnit 8.2.

Historien om de første 40 år af diagonalargumentets liv er altså følgende: Diagonalargumentet bliver født i 1891, hvor det af Cantor bliver benyttet til at bevise eksistensen af overtællelige mængder. 12 år senere bliver det benyttet til at skabe Russells paradoks, som viser at der er alvorlige mangler i Cantors mængdebegreb. Russell forsøger at redde mængdelæren ved at flytte hele teorien til en formel ramme, men pludselig dukker diagonalargumentet op igen, og denne gang bliver det af Gödel benyttet til at bevise alvorlige mangler i Russells formelle teori. Moralen synes at være, at den som på et tidspunkt i sin matematiske karriere tillader sig at anvende diagonalargumentet vil til slut selv få nedbrudt sine opbyggede resultater ved en anden anvendelse af samme argument!

Diagonalargumentet viser i sine anvendelser altid at der er " 'noget' udenfor 'noget andet' " ($\overline{\Delta}_I \notin \mathrm{ran}(I)$), og som sådan giver dets anvendelser altid en eller anden form for begrænsning—en begrænsning i universaliteten af mængden $\mathrm{ran}(I)$. I denne afhandling vil alle de begrænsninger vi påviser opstå af diagonalargumentet. Diagonalargumentet har vist sig at være et universalværktøj til at bevise den type begrænsningsresultater som opstår indenfor matematisk logik.

Tilbage til Russells paradoks. Russell gav selv en simplificeret parallel til sit paradoks i paradokset om barberen. Vi forestiller os at vi befinder os i en lille unavngiven by (eller Sevilla?); i denne by lader vi barbaren, b, være den som barberer alle der ikke barberer sig selv (sammenlign med "lad M være mængden af alle mængder som ikke indeholder sig selv"). Det synes at være rationelt at "definere" en barber således, i hvert fald hvis vi befinder os i en by med udelukkende mænd, og hvis alle disse mænd enten barberer sig selv eller bliver barberet af barberen. Problemet er dog at den givne definition af hvem b barberer også angår b selv. Som b er defineret får vi

$$b \text{ barberer } b \text{ hvis og kun hvis } b \text{ ikke barberer } b$$

hvilket er et paradoks. Dette paradoks bygger som det ovenfor behandlede mængdeteoretiske paradoks på diagonalargumentet. Lad A betegne mængden af indbyggere i byen. Lad $I : A \to \mathcal{P}(A)$ være afbildningen der til enhver indbygger $x \in A$ knytter mængden af indbyggere $I(x)$ som x barberer. Hvis vi definerer b som ovenfor har vi da

$$\begin{aligned} I(b) &= \{x \in A \mid x \text{ barberer ikke sig selv}\} \\ &= \{x \in A \mid x \text{ barberer ikke } x\} \\ &= \{x \in A \mid x \notin I(x)\} = \overline{\Delta}_I. \end{aligned}$$

Men ifølge Lemma 4 er er $\overline{\Delta}_I \notin I(A)$, og vi får da $I(b) \notin I(A)$, hvilket er i modstrid med at b er en indbygger i byen.

Problemet her ses at være definitionen af $I(b)$. $I(b)$ defineres udfra hele afbildningen I, dvs. $I(b)$ defineres rekursivt (i ordets mest generelle betydning), og sådanne rekursive definitioner leder ikke helt generelt til hverken eksistensen eller til entydigheden af de objekter som forsøges defineret. Alle ligninger af typen

$$x = f(x)$$

hvor f er givet, kan ses som sådanne generelle rekursive definitioner, hvor vi forsøger at definere x ved udtrykket $f(x)$. Men vi ved også at hvis f f.eks. er en funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = x^2 + 1$, da definerer udtrykket

$$\begin{gathered} x = f(x) \\ \Updownarrow \\ x = x^2 + 1 \end{gathered}$$

ingen x, mens hvis $f(x) = x^2 - 1$ definerer udtrykket $x = f(x)$ to forskellige $x \in \mathbb{R}$, og hvis $f(x) = x^2$ definerer udtrykket netop én $x \in \mathbb{R}$. Dette viser os at vi ikke generelt kan forvente at en rekursiv definant (et rekursivt definerende udtryk) har et tilhørende definandum (et objekt som bliver defineret ved definanten), og vi har derfor ingen umiddelbar grund til at tage det for givet at $I(b)$ defineret rekursivt som ovenfor skulle give os en veldefineret mængde. Dermed opløses paradokset, idet problemet viser sig at være at barberen med det rekursivt definerede job slet ikke eksisterer, fordi hans job således defineret ikke er veldefineret.

Problemet der giver anledning barberens paradoks er det samme som går igen i Russells mængdeteoretiske paradoks. Forskellen er blot at i det mængdeteoretiske paradoks bliver afbildningen I defineret som inklusionsafbildningen $\subset_A$, og dermed bliver problemet flyttet fra en rekursiv definition af en værdi $I(b)$ ved I selv, til en rekursiv definition af en mængde M (Russell-mængden) ved mængden af alle mængder selv. M defineres ved at lade x være element i M hvis og kun hvis x ikke er element i mængden x. Dette er en rekursiv definition af en enkelt mængde, M, udfra mængden af alle mængder—og heri ligger problemet. Ifølge ovenstående diskussion har vi ingen umiddelbar grund til at mene at der skulle eksistere en mængde M således defineret. Men ifølge Cantors definition af mængdebegrebet (eller i hvert fald sådan som vi fortolker hans lidt vage definition) *må* M eksistere. Problemet må altså ligge i Cantors definition, og vi bør derfor prøve at se nærmere på denne. Selvom det er godt skjult, går det efterhånden op for én at selve denne definition af mængdebegrebet besidder samme problem som definitionen af $I(b)$ ved I og definitionen af M ved mængden af alle mængder: en mængde kan ifølge denne definition af mængdebegrebet være en hvilken som helst samling af objekter, herunder inkluderet samlingen af alle objekter defineret ved mængdebegrebet selv. Cantors definition er altså også en rekursiv definition af den type som ikke generelt er garanteret eksistensen af et definandum—og som "paradokset" viser har vi netop i dette tilfælde intet definandum, intet mængdebegreb som opfylder Cantors definition.

Bemærkninger og referencer Jeg har brugt matematikleksikonet EDM2 ([Itô93]) og Politikens Filosofileksikon ([Lüb83]) til at sikre mig at mine faktuelle oplysninger er korrekte. Bortset fra dette er afsnittet baseret på egne overvejelser.

5 Formelle sprog

5.1 Introduktion til sprogbegrebet

I det følgende skal vi studere sprog. Vi vil vise at sprog har visse essentielle begrænsninger som skyldes den grundlæggende struktur et sprog har. De sprog vi skal studere er skriftsprog og de begrænsninger vi skal påvise er begrænsninger i mængden af begreber som på fornuftig måde kan udtrykkes i sprogene. Først skal vi have defineret begrebet "sprog". Vi definerer et sprog som en matematisk struktur af en bestemt type. Vi forsøger at definere en sådan matematisk struktur så bredt som muligt, så vi får resultaterne til at gælde så generelt som muligt. I definitionen tager vi udgangspunkt i vores intuition om hvad der er fælles for alle (skrift-)sprog, inkluderende både matematiske og naturlige sprog. Vi definerer sprogbegrebet i trin, startende med en definition af begrebet alfabet, for derefter én for én at tilføje definitioner for de forskellige elementer vi mener et sprog som mindstekrav må indeholde. Denne trinvise opbygning af et begrebs definition forekommer at være en mere pædagogisk fremgangsmåde end fra begyndelsen at servere en færdigformuleret definition af sprogbegrebet, som kan forekomme umotiveret.

Et sprog bygger først og fremmest på et alfabet, hvis elementer, bogstaverne, udgør atomerne i sprogets syntaks. Vi definerer et **alfabet** som en endelig følge[6], hvis elementer vi kalder for **symboler**. Et alfabets symboler vil i almindelighed være symboler i sædvanlig matematisk forstand, dvs. bogstaver eller tegn (men da vi arbejder indenfor ZF vil bogstaver og tegn i sig selv blot være betegnelser for mængder). Det vi i sædvanlige sprog kalder for sætninger er følger af symboler over sprogets alfabet. Lad Σ være et alfabet. Da definerer vi Σ^* som mængden af endelige følger over Σ, dvs.

$$\Sigma^* = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \Sigma\}.$$

En følge

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \Sigma^*$$

kalder vi også for en **streng** over Σ, og vi benytter den forkortede skrivemåde

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$$

når Σ er af en sådan skabning at dette kan gøres uden at lede til flertydighed. Et sprogs **sætninger** er en delmængde S af Σ^* hvor Σ er sprogets alfabet. I naturlige sprog møder vi mange forskellige typer sætninger med vidt forskellige typer funktioner, som f.eks. moralske ytringer

[6] På dette punkt i afhandlingen kunne vi lige så godt have defineret et alfabet som en endelig *mængde*, men senere vil det vise sig praktisk at vi har en rækkefølge på elementerne i alfabetet.

Du må ikke slå ihjel.

udråb

Dø!

metaforiske sætninger

Du er den sol der varmer mit hjerte.

og påstandsfremsættende sætninger

Jorden roterer omkring solen.

En påstandsfremsættende sætning er en sætning som altid vil være enten sand eller falsk, da det er en sætning som udtrykker en mulig kendsgerning som enten kan foreligge eller ej i den virkelighed sproget tænkes at udtrykke sig om. En påstandsfremsættende sætning er altså sand hvis dens påstand stemmer overens med den givne virkelighed, ellers falsk. Hvad det nærmere vil sige at en sætning udtrykker en mulig kendsgerning og hvad det vil sige at en mulig kendsgerning foreligger vil vi ikke interessere os for i vores sprogbegreb—vi er blot interesseret i den konsekvens dette har: at der for ethvert sprog må eksistere en opdeling af sprogets sætninger i påstandsfremsættende og ikke-påstandsfremsættende sætninger, og at der igen må eksistere en opdeling af de påstandsfremsættende sætninger i sande og falske sætninger. Når vi senere snakker om hvad en sætning udtrykker, er det da blot for at holde fast i intuitionen bag det hele, men det definerede sprogbegreb kommer ikke til at indeholde nogen egentlig formalisering af dette. Alle ikke-påstandsfremsættende sætninger placeres i samme kategori, da det i denne afhandling er sprogets "evne" til at udtrykke mulige kendsgerninger vi er interesseret i, og ingen interesse har i at kunne skelne mellem f.eks. moralske ytringer og udråb, som begge er typer af sætninger der ikke "påstår noget". De ikke-påstandsfremsættende sætninger kalder vi i det følgende for poetiske sætninger. I ethvert sprog med en mængde af sætninger S må vi altså have defineret en delmængde $Po \subseteq S$ af **poetiske sætninger**, og resten af sætningerne, $S - Po$, må være delt op i en mængde $T \subseteq S - Po$ af **sande sætninger** og en mængde $F \subseteq S - Po$ af **falske sætninger**. Vi kræver at $T \cap F = \emptyset$, dvs. at ingen sætninger både kan være sande og falske, selvom de altså godt kan være hverken eller, idet de kan være poetiske.

Ethvert sprog udtrykker sig i og om en eller anden afgrænset virkelighed eller tænkt virkelighed. Vi antager at enhver sådan virkelighed består af ting (her forstået som det i den pågældende virkelighed værende i bredeste forstand), egenskaber ved ting og relationer[7] mellem ting. En del af disse ting

[7] Ordet relation benyttes her i betydningen "forbindelse", "forhold" eller "sammenhæng", men ikke i den strikte matematiske betydning.

har navne i sproget, som f.eks. "min cykel" i dansk og "5" i matematikken. Navnet på en ting i et sprog kaldes et **konstantnavn**. Konstantnavne er som sætninger strenge over sprogets alfabet, dvs. elementer i Σ^*. Mængden af konstantnavne i et sprog betegner vi med K. En del egenskaber har ligeledes navne i et sprog, som f.eks. "er gul" og "er et primtal". Et navn på en egenskab i et sprog kaldes for et **1-plads prædikatnavn**. 1-plads prædikatnavne er også strenge over sprogets alfabet, og vi betegner mængden af 1-plads prædikatnavne i et sprog med $Pr^{(1)}$. Givet et 1-plads prædikatnavn som "er gul" og et konstantnavn som "min cykel" kan vi danne en sætning som tillægger tingen betegnet ved konstantnavnet (i dette tilfælde min cykel) egenskaben betegnet ved prædikatnavnet (i dette tilfælde egenskaben at være gul), dvs. vi kan danne sætningen "min cykel er gul". I ethvert sprog må vi i overensstemmelse med dette have en operation, som til ethvert konstantnavn og ethvert 1-plads prædikatnavn giver en sætning udtrykkende at tingen angivet ved konstantnavnet opfylder egenskaben angivet ved prædikatnavnet. En sådan operation kunne se således ud

$$O : Pr^{(1)} \times K \to S.$$

Med ovenstående eksempel ville vi da få

$$O(\text{“er gul”}, \text{“min cykel”}) = \text{“min cykel er gul”}.$$

Givet en egenskab, kan vi danne mængden af ting som egenskaben holder for. Denne mængde kaldes egenskabens ekstension. Tilsvarende kan vi for et 1-plads prædikatnavn danne mængden af konstantnavne, som betegner ting som egenskaben betegnet af prædikatnavnet holder for. Dette kalder vi for prædikatnavnets ekstension. Den tilsigtede mening af operationen O er som nævnt at hvis $p \in Pr^{(1)}$ og $k \in K$ så er sætningen $O(p,k)$ sand netop hvis egenskaben som p betegner holder for tingen som k betegner. **Ekstensionen** af et 1-plads prædikatnavn $p \in Pr^{(1)}$ må derfor være defineret ved

$$\{k \in K \mid O(p,k) \in T\}.$$

Lad os se på et eksempel.

Eksempel 6. Vi vil definere et sprog som er en abstraktion af en ret så beskeden del af det danske sprog. Vi lader alfabetet Σ bestå af det danske alfabet skrevet i fed skrift plus mellemrumstegn. Konstantnavnene i sproget lader vi være

$$K = \{\textbf{min cykel}, \textbf{hovedpine}, \textbf{citronen}\}$$

og 1-plads prædikatnavnene gives som

$$Pr^{(1)} = \{\textbf{er gul}, \textbf{er rød}, \textbf{er en dårlig følelse}\}.$$

Vi ønsker at definere operationen O før vi definerer mængden af sætninger S. Dette gøres ved først at definere en $O : Pr^{(1)} \times K \to \Sigma^*$ og så lade $S = O(Pr^{(1)} \times K)$. I sproget vi her definerer bliver alle sætninger således sætninger af den type der udtrykker at en given ting har en given egenskab (subjekt-prædikat sætninger). Vi lader O være følgende trivielle injektion

$$O(p, k) = k\ p$$

Det betyder at vi f.eks. har

$$O(\textbf{er gul}, \textbf{citronen}) = \textbf{citronen er gul}.$$

De sande sætninger i sproget lader vi være

$$T = \{\textbf{min cykel er gul}, \textbf{citronen er gul}, \\ \textbf{hovedpine er en dårlig følelse}\}.$$

Ekstensionen af **er gul** bliver således

$$\begin{aligned}\{k \in K \mid O(\textbf{er gul}, k) \in T\} &= \{k \in K \mid k\ \textbf{er gul} \in T\} \\ &= \{\textbf{min cykel}, \textbf{citronen}\}.\end{aligned}$$

Vi har endnu ikke defineret de falske sætninger i sproget. Da min cykel er gul og ikke rød (i virkeligheden) vil vi lade **min cykel er rød** være en falsk sætning. Men hvad med f.eks. sætningerne

$$O(\textbf{er gul}, \textbf{hovedpine}) = \textbf{hovedpine er gul}$$

og

$$O(\textbf{er en dårlig følelse}, \textbf{min cykel}) = \textbf{min cykel er en dårlig følelse}.$$

Disse sætninger vil vi i standardfortolkningen af det danske skriftsprog ikke opfatte som hverken sande eller falske. De er poetiske og ikke påstandsfremsættende sætninger, for selvom de har form som påstandsfremsættende sætninger udtrykker de ikke en mulig kendsgerning. Det er sætninger som disse der er den egentlige grund til at vi i vores sprogbegreb ikke kræver $S = T \cup F$. Vi opfatter problemet med en sætning som **hovedpine er gul** at være at den benævnte ting (hovedpine) ligger udenfor det naturlige meningsområde af den benævnte egenskab (egenskaben at være gul). Kun legemer med fysisk udstrækning kan have farver, og dermed giver det ikke på naturlig måde mening at påstå hverken at hovedpine er gul eller at hovedpine ikke er gul. Dette inspirerer os til at definere et 1-plads prædikatnavn p's **meningsområde** som mængden

$$\{k \in K \mid O(p, k) \in T \cup F\}$$

I sproget vi her definerer ønsker vi at meningsområderne for 1-plads prædikatnavnene **er gul** og **er rød** bliver

$$\{\textbf{citronen}, \textbf{min cykel}\}$$

og meningsområdet for prædikatnavnet **er en dårlig følelse** bliver

$$\{\textbf{hovedpine}\}$$

Vi kan nu definere mængden af falske sætninger, F, som mængden af sætninger $O(p,k) \in S$ hvor k er i meningsområdet for p men $O(p,k) \notin T$ (sætningen $O(p,k)$ er ikke sand).

Vi har indført navne for ting og egenskaber i vores sprogbegreb, men endnu har vi ikke behandlet relationer. Navne for relationer er nødvendige i et sprog for at kunne udtrykke sammenhænge mellem to eller flere ting. En relation som relaterer to ting til hinanden kaldes for en 2-plads relation. I almindelighed kaldes en relation som relaterer n ting til hinanden for en n-plads relation. Udtrykket "hjælper mod" betegner en 2-plads relation. Det kan benyttes til at udtrykke følgende sammenhæng mellem de to ting "hovedpine" og "panodiler":

Panodiler hjælper mod hovedpine.

Et navn på en n-plads relation i et sprog kaldes for et **n-plads prædikatnavn**. Mængden af n-plads prædikatnavne i et sprog betegner vi med $Pr^{(n)}$. Vi kræver i overensstemmelse med det foregående at $Pr^{(n)} \subseteq \Sigma^*$.

I nogle sprog opererer man også med universelle egenskaber, som ikke udtrykker en egenskab ved en enkelt ting eller en relation mellem et endeligt antal ting. Dette møder vi blandt andet i forbindelse med 1. ordens prædikatlogik, hvor vi f.eks. har en sætning som

$$\forall x \exists y (y > x)$$

der ikke på naturlig måde i en 1. ordens sammenhæng kan dekomponeres i et prædikatnavn et antal konstantnavne. For at kunne håndtere sådanne sætninger på lige fod med de sætninger vi hidtil har set eksempler på, indfører vi begrebet 0-plads prædikatnavn. Et 0-plads prædikatnavn er er et navn på en egenskab af den den netop nævnte type. Et 0-plads prædikatnavn giver for sig selv anledning til en sætning, uden at blive tilknyttet et antal konstantnavne. Vi betegner mængden af 0-plads prædikatnavne i et sprog med $Pr^{(0)}$ og kræver $Pr^{(0)} \subseteq \Sigma^*$.

For at inkorporere brugen af n-plads prædikatnavne for alle $n \in \mathbb{N}$ i vores sprogbegreb ændrer vi typen af operationen O fra $O : Pr \times K \to S$ til

$$O : \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(Pr^{(n)} \times K^n \right) \to S.$$

O er altså en afbildning som til ethvert n-plads prædikatnavn og enhver følge af n konstantnavne giver en sætning.

Eksempel 7. Udvider vi sproget i eksemplet ovenfor (Eksempel 6) med konstantnavnet **panodiler** og 2-plads prædikatnavnet **hjælper mod**, og udvider vi operationen O med følgende definition

$$\text{Hvis } p \in Pr^{(2)} \text{ og } k_1, k_2 \in K \text{ så } O\left(p, (k_1, k_2)\right) = k_1\ p\ k_2$$

da har vi f.eks.

$$O\left(\textbf{hjælper mod}, (\textbf{panodiler}, \textbf{hovedpine})\right) = \textbf{panodiler hjælper mod hovedpine}$$

og

$$O\left(\textbf{hjælper mod}, (\textbf{min cykel}, \textbf{citronen})\right) = \textbf{min cykel hjælper mod citronen}$$

hvor det ville være naturligt at definere den første sætning som sand og den anden som poetisk.

Bemærkninger og referencer Overvejelserne i dette afsnit er ikke baseret på en enkelt, bestemt inspirationskilde. Den sprogopfattelse som jeg her giver udtryk for er en opfattelse jeg har fået opbygget efterhånden igennem mine studier af logik og sprogfilosofi. Jeg har benyttet [Lüb83] for at sikre mig at min terminologi er i nogenlunde overensstemmelse med den gængse. Begrebet "poetisk sætning" er dog mit eget, og det er det sprogbegreb jeg når frem til også.

5.2 Definition af formelle sprog

Nu har vi introduceret en del elementer som vi mener er fælles for alle (skrift-)sprog og som definerer hvad vi i det følgende vil opfatte som sprog. De således definerede sprog vil vi i det følgende kalde for *formelle sprog*. Lad os opsumere definitionen.

Definition 8. *Et* ***formelt sprog*** σ *består af følgende 7 elementer*

- *En endelig følge* Σ_σ *kaldet* ***alfabetet****.*
- *En mængde* $S_\sigma \subseteq \Sigma_\sigma^*$ *af* ***sætninger****.*
- *En mængde* $T_\sigma \subseteq S_\sigma$ *af* ***sande sætninger****.*
- *En mængde* $F_\sigma \subseteq S_\sigma - T_\sigma$ *af* ***falske sætninger****.*
- *En mængde* $K_\sigma \subseteq \Sigma_\sigma^*$ *af* ***konstantnavne****.*
- *For alle* $n \in \mathbb{N}$ *en mængde* $Pr_\sigma^{(n)} \subseteq \Sigma_\sigma^*$ *af* n***-plads prædikatnavne****.*
- *En afbildning* $O_\sigma : \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(Pr_\sigma^{(n)} \times K_\sigma^n \right) \to S_\sigma$*.*

Vi har ikke defineret mængden af poetiske sætninger Po_σ eksplicit da den er givet ved mængderne S_σ,T_σ og F_σ som $Po_\sigma = S_\sigma - (T_\sigma \cup F_\sigma)$. For ethvert sprog σ lader vi $Pr_\sigma = \bigcup_{n=0}^{\infty} Pr_\sigma^{(n)}$. Pr_σ er altså mængden af samtlige prædikatnavne i σ.

Vi kunne selvfølgelig have defineret vores sprogbegreb anderledes, men i det ovenstående har vi forsøgt at give motivation for alle de definerede elementer, og skulle man være uenig i det universelle eller intuitivt naturlige i nogle af definitionerne er det ikke så vanskeligt at gå ind og pille ved dem og begrunde ændringerne med udgangspunkt i de ovenfor angivne motivationer.

Eksempel 9 (Formel Aritmetik). Vi definerer i dette eksempel et formelt sprog for aritmetiske udsagn. Vi betegner sproget *FA*. Alfabetet for sproget er

$$\Sigma_{FA} = \left(0\ ,\ x\ ,\ +\ ,\ '\ ,\ \cdot\ ,\ [\ ,\ ]\ ,\ =\ ,\ \exists\ ,\ \neg\ ,\ \wedge\ ,\ {}^\wedge\right)$$

og mængden af konstantnavne K_{FA} er

$$K_{FA} = \{0, 00, 000, 0000, \dots\}.$$

Vi vil oftest benytte den forkortede skrivemåde $\overline{n}$ for elementet $00\dots0$ med $(n+1)$ nuller. Vi benyttes således f.eks. $\overline{4}$ som en forkortelse for $00000 \in K_{FA}$. Før vi definerer resten af elementerne i *FA* indfører vi en mængde af **variabelnavne**, V_{FA}, og mængder At_{FA} og Lt_{FA} af henholdsvis **åbne og lukkede termer** i *FA*. Mængden af variabelnavne lader vi være

$$V_{FA} = \{x'x, x''x, x'''x, \dots\}.$$

Vi vil oftest benytte den forkortede skrivemåde x_n for elementet $x''^{\cdots\prime}x$ med n apostroffer. n kaldes for variabelnavnet x_n's **indeks**. Mængden At_{FA} defineres nu rekursivt ved

(i) Hvis $k \in K_{FA}$ så $k \in At_{FA}$.

(ii) Hvis $v \in V_{FA}$ så $v \in At_{FA}$.

(iii) Hvis $t_1, t_2 \in At_{FA}$ så $[t_1 + t_2] \in At_{FA}$

(iv) Hvis $t_1, t_2 \in At_{FA}$ så $[t_1 \cdot t_2] \in At_{FA}$.

(v) Hvis $t_1, t_2 \in At_{FA}$ så $[t_1 \,^\wedge\, t_2] \in At_{FA}$.

Mængden Lt_{FA} defineres som mængden af strenge At_{FA} der ikke indeholder variabelnavne, dvs. ikke indeholder symbolet x. Som eksempler på åbne og lukkede termer i FA har vi

$$\begin{aligned} &[[00 + 000] \cdot 0000] \in Lt_{FA} \\ \text{og} \quad &[[00 + x'x] \cdot 0000] \in At_{FA} \end{aligned}$$

der ved brug af de forkortede skrivemåder kan skrives

$$\begin{aligned} &[[\overline{1} + \overline{2}] \cdot \overline{3}] \\ \text{og} \quad &[[\overline{1} + x_1] \cdot \overline{3}]. \end{aligned}$$

Prædikatnavnene i FA defineres ved først at angive mængden af samtlige prædikatnavne Pr_{FA} og dernæst angive en opsplitning af Pr_{FA} i mængderne $Pr_{FA}^{(n)}$. Pr_{FA} defineres rekursivt ved

(i) Hvis $t_1, t_2 \in At_{FA}$ så $t_1 = t_2 \in Pr_{FA}$.

(ii) Hvis $p \in Pr_{FA}$ og $v \in V_{FA}$ så $\exists v[p] \in Pr_{FA}$.

(iii) Hvis $p_1, p_2 \in Pr_{FA}$ så $[p_1 \wedge p_2] \in Pr_{FA}$.

(iv) Hvis $p_1 \in Pr_{FA}$ så $\neg[p_1] \in Pr_{FA}$.

Før vi kan definere opsplitningen af Pr_{FA} i mængderne $Pr_{FA}^{(n)}$ definerer vi et par nye begreber. En **fri forekomst** af et variabelnavn $v \in V_{FA}$ i et prædikatnavn $p \in Pr_{FA}$ er en forekomst af delstrengen v i strengen p som ikke ligger indenfor en anden delstreng $\exists v[q] \in Pr_{FA}$ af p. En forekomst som ikke er fri kaldes en **bunden forekomst**. Mængden af **frie variabelnavne** i $p \in Pr_{FA}$ er mængden af variabelnavne som har frie forekomster i p. Hvis de frie variabelnavne i p er $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ ordnet efter voksende indeks, skriver vi ofte $p(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ istedet for blot p. Hvis $t_1, \ldots, t_n \in At_{FA}$ lader vi

$$p(t_1, \ldots, t_n)$$

betegne prædikatnavnet som opstår ved i p at erstatte alle frie forekomster af x_{i_k} med t_k. Når vi erstatter x_{i_k} med t_k ønsker vi at undgå at eventuelle frie forekomster af variabelnavne i t_k bliver til bundne forekomster i $p(t_1, \ldots, t_n)$. Dette kan undgås ved før vi erstatter x_{i_k} med t_k at erstatte alle bundne forekomster i p af ethvert variabelnavn v som også forekommer i t_k med et nyt variabelnavn v' som hverken forekommer i nogen af t_k'erne eller i p. Når vi skriver $p(t_1, \ldots, t_k)$ vil vi antage at denne omdøbning af variabelnavnene i p er foretaget før vi erstatter x_{i_k} med t_k. Hvis f.eks. $p(x_1) = \exists x_2[x_1 = x_2]$ vil $p(x_2)$ da ikke betegne prædikatet $\exists x_2[x_2 = x_2]$ men et af prædikaterne $\exists x_k[x_2 = x_k]$ hvor $k \neq 2$.[8]

Vi kan nu definere mængderne $Pr_{FA}^{(n)}$:

$$Pr_{FA}^{(n)} = \{p \in Pr_{FA} \mid p \text{ indeholder netop } n \text{ forskellige frie variabelnavne}\}.$$

Vi lader

$$S_{FA} = Pr_{FA}^{(0)}$$

og definerer O_{FA} ved

$$O_{FA}(p(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}), (k_1, \ldots, k_n)) = p(k_1, \ldots, k_n).$$

Mængden T_{FA} defineres rekursivt ved

(i) Hvis $s = \ t_1{=}t_2 \ \in S_{FA}$ så

$$s \in T_{FA} \Leftrightarrow I(t_1) = I(t_2)$$

hvor $I : Lt_{FA} \to \mathbb{N}$ defineres rekursivt ved

(a) $I(\overline{n}) = n$

(b) $I([t_1 + t_2]) = I(t_1) + I(t_2)$

(c) $I([t_1 \cdot t_2]) = I(t_1) \cdot I(t_2)$

(d) $I([t_1 \,\hat{}\, t_2]) = I(t_1)^{I(t_2)}$

(ii) Hvis $s = \exists v[p] \in S_{FA}$ hvor v ikke forekommer frit i p så

$$s \in T_{FA} \Leftrightarrow p \in T_{FA}.$$

Hvis $s = \exists v[p(v)] \in S_{FA}$ så

$$s \in T_{FA} \Leftrightarrow p(k) \in T_{FA} \text{ for en } k \in K_{FA}.$$

[8]Valget af k giver en flertydighed i udtrykket $p(x_2)$, men denne flertydighed har ingen semantiske konsekvenser, så vi kan tillade os at se bort fra dette.

(*iii*) Hvis $s = [p_1 \wedge p_2] \in S_{FA}$ så

$$s \in T_{FA} \Leftrightarrow p_1 \in T_{FA} \text{ og } p_2 \in T_{FA}$$

(*iv*) Hvis $s = \neg[p] \in S_{FA}$ så

$$s \in T_{FA} \Leftrightarrow p \notin T_{FA}.$$

Dette afslutter definitionen af T_{FA}. Vi definerer F_{FA} ved

$$F_{FA} = S_{FA} - T_{FA}.$$

For at lette overblikket og forståelsen når vi opskriver elementer fra Pr_{FA} vil vi benytte følgende forkortelser

udtrykket	er en forkortelse for
$[p_1 \rightarrow p_2]$	$\neg[p_1 \wedge \neg[p_2]]$
$[p_1 \leftrightarrow p_2]$	$[[p_1 \rightarrow p_2] \wedge [p_2 \rightarrow p_1]]$
$[p_1 \vee p_2]$	$\neg[\neg[p_1] \wedge \neg[p_2]]$
$\forall v[p]$	$\neg[\exists v[\neg[p_1]]]$

Vi vil desuden undlade en del parenteser ved at lade $\neg$, $\exists v$ og $\forall v$ binde stærkere end $\vee$ og $\wedge$, som igen binder stærkere end $\rightarrow$. Tilsvarende vil vi på sædvanlig måde lade $^\wedge$ binde stærkere end $\cdot$, som igen binder stærkere end $+$.

Vi præciserer og udvider nu begreberne ekstension og meningsområde, som vi introducerede i foregående afsnit.

Definition 10. *Lad σ være et formelt sprog. Hørende til σ definerer vi* ***ekstensionsafbildningen*** $E_\sigma : \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(Pr_\sigma^{(n)} \rightarrow K_\sigma^n \right)$ [9] *som til ethvert n-plads prædikatnavn $p \in Pr_\sigma^{(n)}$ giver prædikatnavnets* ***ekstension***

$$E_\sigma(p) = \left\{ (k_1, \ldots, k_n) \in K_\sigma^n \;\middle|\; O_\sigma\left(p, (k_1, \ldots, k_n)\right) \in T_\sigma \right\}.$$

Definition 11. *Lad σ være et formelt sprog. Ethvert n-plads prædikatnavn p i σ har et* ***meningsområde*** *$M_\sigma(p)$ defineret ved*

$$M_\sigma(p) = \left\{ (k_1, \ldots, k_n) \in K_\sigma^n \;\middle|\; O_\sigma\left(p, (k_1, \ldots, k_n)\right) \in T_\sigma \cup F_\sigma \right\}.$$

Det største meningsområde et prædikatnavn $p \in Pr_\sigma^{(n)}$ kan have er $M_\sigma(p) = K_\sigma^n$. Vi siger da at p er et prædikatnavn med ***universelt meningsområde***.

[9] At afbildningen E_σ har typen $\bigcup_{n=0}^{\infty} \left(Pr_\sigma^{(n)} \rightarrow K_\sigma^n \right)$ betyder at det er en uendelig union af afbildninger af typen $Pr_\sigma^{(n)} \rightarrow K_\sigma^n$ hvor n gennemløber $\mathbb{N}$.

Givet et prædikatnavn p i et sprog σ danner p's ekstension sammen med dets meningsområde et par $(E_\sigma(p), M_\sigma(p))$, som er et prædikat over K_σ. $(E_\sigma(p), M_\sigma(p))$ er prædikatet som p "udtrykker" eller er et "navn for" i σ. Vi definerer

Definition 12. *Lad σ være et formelt sprog. Hørende til σ definerer vi en* ***navngivningsafbildning***

$$N_\sigma : \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(Pr_\sigma^{(n)} \to K_\sigma^{[n]} \right)$$

som til ethvert n-plads prædikatnavn $p \in Pr_\sigma^{(n)}$ giver n-plads prædikatet

$$N_\sigma(p) = (E_\sigma(p), M_\sigma(p)) .$$

Vi siger at prædikatnavnet p er ***navn for*** *prædikatet $N_\sigma(p)$. Et n-plads prædikat P over Σ_σ^* siges at* ***have navn i*** *σ hvis $P \in \mathrm{ran}(N_\sigma)$, dvs. hvis der eksisterer et n-plads prædikatnavn $p \in Pr_\sigma$ med $N_\sigma(p) = P$. Hvis $N_\sigma(p) = P$ siges P at* ***have navnet*** *p i σ.*

Hvis p er et navn for P i σ gælder

$$\begin{gathered} N_\sigma(p) = P \\ \Downarrow \\ (E_\sigma(p), M_\sigma(p)) = (E(P), M(P)) \end{gathered}$$

dvs. p og P har samme ekstension og samme meningsområde. Omvendt, hvis $p \in Pr_\sigma^{(n)}$ og $P \in \Sigma_\sigma^{*[n]}$ er et prædikatnavn og et prædikat med samme ekstension og meningsområde, da er p navn for P. Bemærk at et formelt sprog σ kun kan have navn for et prædikat $P \in \Sigma_\sigma^{*[n]}$ hvis $M(P) \subseteq K_\sigma^n$, idet der for ethvert n-plads prædikatnavn p i σ gælder $M_\sigma(p) \subseteq K_\sigma^n$, og hvis et sådant p skulle være navn for P måtte gælde $M(P) = M_\sigma(p) \subseteq K_\sigma^n$.

Begreberne "navn for" og "have navn" kan også benyttes i forbindelse med relationer over Σ_σ^* (herunder specielt delmængder af Σ_σ^*):

Definition 13. *En n-plads relation R over Σ_σ^* siges at* ***have navn i*** *σ hvis $R \in \mathrm{ran}(E_\sigma)$, dvs. hvis R kan udstyres med et meningsområde således at det herved fremkomne prædikat har navn i σ. p siges at være* ***navn for*** *R i σ hvis $E_\sigma(p) = R$. I dette tilfælde siges R at* ***have navnet*** *p i σ.*

Definition 14. *Lad s_1 og s_2 være sætninger i et formelt sprog σ. Vi siger at s_1 og s_2 er* ***ækvivalente i*** *σ hvis de begge er i indeholdt i den samme af mængderne T_σ, F_σ eller Po_σ. Ækvivalens mellem s_1 og s_2 i σ skrives $s_1 \sim_\sigma s_2$.*

Definition 15. *Et formelt sprog σ kaldes* ***enkelttypet*** *hvis*

$$\mathrm{ran}(O_\sigma) \subseteq T_\sigma \cup F_\sigma .$$

Et formelt sprog som ikke er enkelttypet kaldes ***flertypet***.

Bemærk at et formelt sprog et enkelttypet hvis og kun hvis alle n-plads prædikatnavne i sproget for alle n har universelt meningsområde.

Eksempel 16. Mængden $L = \{(\overline{n}_1, \overline{n}_2) \in K^2_{FA} \mid n_1 < n_2\}$ har navn i *FA*. Dette følger af følgende ækvivalens

$$
\begin{aligned}
& (\overline{n}_1, \overline{n}_2) \in L \\
\Leftrightarrow\ & n_1 < n_2 \\
\Leftrightarrow\ & n_2 = n_1 + n_3 + 1 \text{ for en } n_3 \in \mathbb{N} \\
\Leftrightarrow\ & \exists x_3[\overline{n}_2 = \overline{n}_1 + x_3 + \overline{1}] \in T_{FA} \\
\Leftrightarrow\ & (\overline{n}_1, \overline{n}_2) \in E_{FA}\left(\exists x_3[x_2 = x_1 + x_3 + \overline{1}]\right).
\end{aligned}
$$

Ækvivalensen viser at prædikatet

$$\exists x_3[x_2 = x_1 + x_3 + \overline{1}]$$

er navn for L. Vi skal senere benytte det at L har navn i *FA* som værktøj til at bevise at andre, mere komplicerede, relationer har navne i *FA*.

Bemærkninger og referencer Jeg kender ikke til noget andet sprogbegreb i litteraturen som er ækvivalent med det her givne. Det her givne sprogbegreb er en abstraktion og en generalisering af de sprog man sædvanligvis møder i matematisk logik—det omfatter på naturlig måde f.eks. både første-ordens sprog med deres første-ordens strukturer, højere-ordens sprog med deres højere ordens strukturer og modal-logikker med deres muligverdens semantikker. Det konkrete formelle sprog *FA* er defineret i overenstemmelse med litteraturen, blot har jeg valgt at repræsentere konstanter og variable paa en lidt anden form end den almindelige. Konstantnavnene er valgt på formen 00...0 for at simplificere det senere arbejde med sammenhængene imellem *FA* og `while`-programmering. Variabelnavnene er valgt på formen $x^{\prime\prime\cdots\prime}x$ istedet for f.eks. formen $x^{\prime\prime\cdots\prime}$ for at undgå de problemer og flertydigheder der kan opstå når et variabelnavn kan forekomme som ægte delstreng af et andet variabelnavn. Begreberne "enkelttypet" og "flertypet" sprog er mine egne, men distinktionen synes at være rimelig naturlig og oplagt.

5.3 Syntaks, semantik og normalsprog

Sprogene i det ovenfor definerede sprogbegreb består både af en syntaks og en semantik. Et sprogs **syntaks** er reglerne for hvordan sprogets sætninger formeres, uafhængigt af deres betydningsmæssige aspekter. De syntaktiske elementer i et formelt sprog σ er elementerne $\Sigma_\sigma, S_\sigma, K_\sigma, Pr_\sigma$ og O_σ. I et sprogs **semantik** knyttes betydninger til de sproglige elementer, og sætningerne får tildelt sandhedsværdier. De semantiske elementer i et formelt sprog σ er mængderne T_σ og F_σ. Bemærk at det at angive en semantik for et sprog blot ved at angive mængden af sande og mængden af falske sætninger i sproget er en del mere generelt end den måde en semantik defineres på i de sprog vi sædvanligvis møder i matematisk logik (1. ordens sprog, o.s.v.). Som vi senere skal se giver denne generalisering nogle nye muligheder, f.eks. muligheden for at have sprog med direkte selvreference.

Definition 17. *En **formel syntaks** σ_y består af følgende elementer*

- *En endelig følge Σ_σ kaldet **alfabetet**.*
- *En mængde $S_\sigma \subseteq \Sigma_\sigma^*$ af **sætninger**.*
- *En mængde $K_\sigma \subseteq \Sigma_\sigma^*$ af **konstantnavne**.*
- *For alle $n \in \mathbb{N}$ en mængde $Pr_\sigma^{(n)} \subseteq \Sigma_\sigma^*$ af **n-plads prædikatnavne**.*
- *En afbildning $O_\sigma : \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(Pr_\sigma^{(n)} \times K_\sigma^n \right) \to S_\sigma$.*

*En **formel semantik** σ_e hørende til en formel syntaks σ_y består af følgende elementer*

- *En mængde $T_\sigma \subseteq S_\sigma$ af **sande sætninger**.*
- *En mængde $F_\sigma \subseteq S_\sigma - T_\sigma$ af **falske sætninger**.*

*I overenstemmelse med den tidligere definition består et **formelt sprog** σ af en formel syntaks σ_y med en tilhørende formel semantik σ_e. Lad der være givet et formelt sprog σ. Ved **syntaksen for sproget** σ og **semantikken for sproget** σ forstås henholdsvis den formelle syntaks σ_y og den formelle semantik σ_e som tilsammen udgør σ.*

Vi vil definere en speciel type formelle sprog, som skal anvendes til at gøre en del af de senere resultater og betragtninger lidt mindre omstændelige.

Definition 18. *En formel syntaks σ_y kaldes en **normalsyntaks** hvis der gælder*

(i) *Σ_σ indeholder symbolerne [,] og ; .*

(ii) $O_\sigma(p, (k_1, \dots, k_n)) = p[k_1; \dots ; k_n]$
for alle $n \in \mathbb{N}$, *alle* $p \in Pr_\sigma^{(n)}$ *og alle* $(k_1, \dots, k_n) \in K_\sigma^n$

(iii) $S_\sigma = \operatorname{ran}(O_\sigma)$

(iv) *I enhver af strengene i* K_σ *er forekomsterne af symbolerne* [*og*] *balancerede som sædvanlige paranteser, og symbolet* ; *forekommer kun indenfor et par af* [*og*].

Et formelt sprog som består af en normalsyntaks med tilhørende formel semantik kaldes et ***normalsprog****.*

I det følgende vil vi oftest når vi ønsker at definere en normalsyntaks σ_y nøjes med at angive mængderne Σ_σ, K_σ og $Pr_\sigma^{(n)}$, da mængden S_σ og afbildningen O_σ er givet entydigt udfra disse ved kravet om at σ_y er en normalsyntaks. Oftest vil vi også undlade at medtage symbolerne [,] og ; når vi definerer et alfabet Σ_σ for en normalsyntaks, og blot lade det være implicit givet at disse hører med til alfabetet. Kravet (*iv*) ovenfor sikrer at O_σ bliver injektiv, idet det sikrer at

$$p[k_1; \dots ; k_n] = p'[k'_1; \dots ; k'_m] \Rightarrow$$
$$p = p', m = n \text{ og } k_i = k'_i \text{ for alle } i \in \{1, \dots, n\}\ .$$

Lemma 19. *Lad* σ_y *være en normalsyntaks og lad der være givet en afbildning*

$$N : \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(Pr_\sigma^{(n)} \to K_\sigma^{[n]} \right) .$$

Der eksisterer en entydig formel semantik σ_e *således at navngivningsafbildningen* N_σ *for sproget bestående af* σ_y *og* σ_e *er identisk med* N*.*

Bevis σ_e skal defineres så $N(p)$ for alle $p \in Pr_\sigma^{(n)}$ er det prædikat p er navn for i sproget bestående af σ_y og σ_e. Det vil sige T_σ og F_σ skal defineres så

$$(k_1, \dots, k_n) \in E(N(p)) \Leftrightarrow p[k_1; \dots ; k_n] \in T_\sigma \tag{1}$$

og

$$(k_1, \dots, k_n) \in M(N(p)) \Leftrightarrow p[k_1; \dots ; k_n] \in T_\sigma \cup F_\sigma \tag{2}$$

for alle $p \in Pr_\sigma^{(n)}$. Da σ_y er en normalsyntaks gælder

$$S_\sigma = \operatorname{ran}(O_\sigma) = \left\{ p[k_1; \dots ; k_n] \;\middle|\; p \in Pr_\sigma^{(n)}, (k_1, \dots, k_n) \in K_\sigma^n \right\} .$$

Af dette fås at T_σ og F_σ kan vælges på én og bare én måde så (1) og (2) bliver opfyldte—nemlig ved at lade

$$T_\sigma = \{p[k_1; \ldots ; k_n] \mid (k_1, \ldots , k_n) \in E(N(p))\}$$

og

$$F_\sigma = \{p[k_1; \ldots ; k_n] \mid (k_1, \ldots , k_n) \in M(N(p))\} - T_\sigma.$$

hvor betingelsen (iv) i Definition 18 sikrer at dette giver to veldefinerede mængder. Det ønskede er hermed vist. $\square$

Ovenstående lemma viser at når vi ønsker at definere en formel semantik for et normalsprog, kan vi nøjes med at angive en navngivningsafbildning, hvoraf den formelle semantik bliver induceret på entydig måde. Benytter vi desuden bemærkningen efter Definition 18, får vi således at vi kun behøver at angive elementerne Σ_σ, K_σ, $Pr_\sigma^{(n)}$ og N_σ for at have defineret et normalsprog σ på entydig måde.

Lemma 20. *For ethvert formelt sprog σ hvor $\Sigma_\sigma \cap \{[\ ,\ ]\ ,\ ;\} = \emptyset$ eksisterer der et normalsprog τ med*

$$N_\tau = N_\sigma.$$

Bevis Lad σ være givet. Mængderne Σ_σ, K_σ og $Pr_\sigma^{(n)}$ i σ inducerer en normalsyntaks τ_y. Afbildningen N_σ giver ifølge Lemma 19 på entydig måde en tilhørende formel semantik τ_e, således at der i sproget τ bestående af τ_y og τ_e gælder

$$N_\tau = N_\sigma.$$

Hermed er det ønskede vist. $\square$

Ovenstående lemma viser at så længe de aspekter af formelle sprog vi er interesseret i kun er hvilke prædikater sprogene har navne for, da kan vi lige så godt se på de specielle normalsprog som på formelle sprog i almindelighed.

Bemærkninger og referencer Den distinktion jeg her foretager imellem et formelt sprogs syntaks og dets semantik burde være konsistent med tilsvarende distinktioner i forbindelse med andre sprogbegreber. Begrebet "normalsprog" er ikke en indskrænkning af mit sprogbegreb som egentlig er essentielt nødvendig at have for at kunne bevise resultaterne i det følgende, men vi vil alligevel i nogle af de kommende resultater indskrænke os til kun at se på normalsprog, da det i disse resultater vil gøre livet en del lettere at have denne begrænsning.

6 Begrænsninger i formelle sprog

6.1 Introduktion

De begrænsninger vi ønsker at påvise er som tidligere nævnt begrænsninger i mængden af begreber som kan udtrykkes i sprogene. Vi kan indenfor rammen af formelle sprog nu præcisere hvad vi hermed mener. Det indenfor rammen af formelle sprog præciserede modstykke til begrebet "begreb" er begrebet "prædikat". Modstykket til at sige: "begrebet kan udtrykkes i sproget" er i rammen af formelle sprog at sige: "prædikatet har navn i det formelle sprog". De begrænsninger vi ønsker at påvise er altså begrænsninger i mængden af prædikater som kan have navne i de forskellige formelle sprog.

Vi giver først en version af diagonalargumentet tilpasset rammen af formelle sprog.

Lemma 21. *Lad σ være et formelt sprog. Lad $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ og lad $A \subseteq K_\sigma^n$. Lad der være givet en afbildning $I : A \to \mathcal{P}(K_\sigma^n)$ med $\mathrm{ran}(I) \supseteq E_\sigma(Pr_\sigma^{(n)})$. Da har mængden $\overline{\Delta}_I$ ikke navn i σ.*

Bevis Ifølge Lemma 4 gælder

$$\overline{\Delta}_I \in \mathcal{P}(A) - \mathrm{ran}(I) \subseteq \mathcal{P}(K_\sigma^n) - \mathrm{ran}(I) \subseteq \mathcal{P}(K_\sigma^n) - E_\sigma(Pr_\sigma^{(n)}).$$

Det betyder at $\overline{\Delta}_I$ er en n-plads relation over K_σ (idet $\overline{\Delta}_I \in \mathcal{P}(K_\sigma^n)$), som ikke er ekstensionen af noget n-plads prædikatnavn i σ (idet $\overline{\Delta}_I \notin E_\sigma(Pr_\sigma^{(n)})$). $\Box$

Teorem 22 (Første begrænsning). *Hvis σ er et formelt sprog med uendelig mange konstantnavne eksisterer der for ethvert $n > 0$ et n-plads prædikat over K_σ som ikke har navn i σ.*

Bevis Lad $n > 0$ være givet. Da K_σ^n er tællelig og $Pr_\sigma^{(n)}$ er højst tællelig eksisterer der en injektion $J : Pr_\sigma^{(n)} \to K_\sigma^n$. Lad $I : \mathrm{ran}(J) \to \mathcal{P}(K_\sigma^n)$ være givet ved $I = E_\sigma \circ J^{-1}$. Da der nu gælder

$$\mathrm{ran}(I) = I(\mathrm{ran}(J)) = E_\sigma \circ J^{-1}(\mathrm{ran}(J)) = E_\sigma(Pr_\sigma^{(n)})$$

giver ovenstående lemma umiddelbart det ønskede. $\Box$

Vi kunne have bevist ovenstående med endnu færre armbevægelser: $\mathcal{P}(K_\sigma^n)$ er overtællelig fordi K_σ^n er uendelig, og da Pr_σ er højst tællelig er der dermed flere prædikater over K_σ end der er prædikatnavne i σ, og derfor kan ikke alle prædikaterne have navne i dette sprog. Dette kortere bevis er naturligvis dybest set det samme som ovenstående, da det er diagonalargumentet som giver os at $\mathcal{P}(K_\sigma^n)$ er overtællelig når K_σ^n er uendelig.

Resultatet opfattes som et generelt begrænsningsresultat, da det siger at ethvert formelt sprog σ altid vil have mindst én af følgende to begrænsninger

- Der er kun endeligt mange konstantnavne i σ.
- Der eksisterer prædikater over K_σ som ikke har navn i σ.

Et sprog som kun har endeligt mange konstantnavne er naturligvis begrænset idet at der så kun er endeligt mange ting som kan betegnes i sproget. Et sådant sprog vil f.eks. ikke kunne have konstantnavne for alle naturlige tal. Den beviste begrænsning er måske ikke særlig interessant, da prædikaterne vi beviser ikke at have navne i σ er konstruerede netop med det formål at de ikke skulle have navne i σ. Dermed er de måske ikke prædikater som vi i noget praktisk forekommende sprog kunne være interesseret i at have navne for. I det følgende vil vi se på nogle mere alvorlige begrænsninger. Vi starter med at komme med et par nye definitioner.

Givet et formelt sprog σ og et prædikat P over K_σ kan vi altid udvide σ til et sprog med navn for P. En lidt svagere version af dette ligger i følgende definition.

Definition 23. *Lad der være givet et normalsprog σ. Lad $\Sigma \supseteq \Sigma_\sigma$ være en endelig følge (et alfabet), lad $p \in \Sigma^* - Pr_\sigma$ og lad P være et n-plads prædikat over K_σ. Ved*

$$udvid(\sigma, P, p)$$

forstås normalsproget τ med normalsyntaksen

$$\begin{aligned} &\Sigma_\tau = \Sigma_\sigma \cup \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha \textit{ er et symbol i } p\} \\ &K_\tau = K_\sigma \\ &Pr_\tau^{(i)} = \begin{cases} Pr_\sigma^{(i)} & \textit{for } i \neq n \\ Pr_\sigma^{(i)} \cup \{p\} & \textit{for } i = n \end{cases} \end{aligned}$$

og navngivningsafbildningen

$$N_\tau(x) = \begin{cases} N_\sigma(x) & \textit{for } x \in Pr_\sigma \\ P & \textit{for } x = p \end{cases}$$

Af definitionen af navngivningsafbildningen N_τ ovenfor ses det at

$$\operatorname{ran}(N_\tau) = \operatorname{ran}(N_\sigma) \cup \{P\}$$

dvs. $\tau = udvid(\sigma, P, p)$ er et sprog som har navn for P samt for alle prædikaterne som har navn i σ. $udvid(\sigma, P, p)$ er en simpel udvidelse af σ der, hvis $K_\sigma \supseteq M(P)$, blot afviger fra σ ved at indeholde prædikatnavnet p som navn for P. Hvis $K_\sigma \not\supseteq M(P)$ er $udvid(\sigma, P, p)$ desuden udvidet med konstantnavne for alle elementerne i P's meningsområde.

Ovenstående definition giver indtryk af at formelle sprog ikke indeholder nogen essentielle begrænsninger i de begreber som kan udtrykkes i sprogene, idet ethvert begreb som vi på et givet tidspunkt måtte ønske at udtrykke i et givet sprog blot kan tilføjes til sproget som et nyt prædikatnavn med den ønskede ekstension og det ønskede meningsområde. Men dette er kun tilfældet så længe de begreber vi ønsker at indføre i sproget er eksterne i forhold til sproget selv, dvs. er begreber som handler om noget udenfor sproget, f.eks. begrebet rød eller egenskaben at være en dårlig følelse. Når vi går over til et sprogs interne begreber, dvs. begreber som handler om sproget selv, f.eks. sprogets sandhedsbegreb, er det ikke længere givet at der eksisterer et sprog som kan udtrykke begrebet. For at se nærmere på dette, præciserer vi først hvad vi vil forstå ved et internt begreb i rammen af formelle sprog.

Definition 24. *Lad $n \in \mathbb{N}$. En afbildning som til ethvert formelt sprog σ giver et n-plads prædikat over Σ_σ^* kaldes et **internt n-plads prædikat**.*

Definition 25. *Lad σ være et formelt sprog. Et internt n-plads prædikat P siges at **have navn** i σ hvis $P(\sigma)$ har navn i σ. Et navn p for $P(\sigma)$ i σ kaldes et **navn for** P i σ.*

Eksempel 26. Sandhed kan ses som et internt prædikat der til ethvert formelt sprog σ giver prædikatet med ekstension T_σ og meningsområde S_σ. Vi definerer

Definition 27. *SAND er det interne prædikat givet ved*

$$SAND(\sigma) = (T_\sigma, S_\sigma).$$

Tilsvarende kan vi definere

Definition 28. *FALSK er det interne prædikat givet ved*

$$FALSK(\sigma) = (F_\sigma, S_\sigma).$$

Hvis et formelt sprog σ skal have navn for $SAND$ bliver der nødt til at gælde $K_\sigma \supseteq M(SAND(\sigma))$, dvs. $K_\sigma \supseteq S_\sigma$. Hvis vi antager at σ er et formelt sprog hvor 1-plads prædikatnavnet **er sand** er navn for prædikatet $SAND$, da vil for alle $s \in S_\sigma$ gælde

$$O_\sigma(\textbf{er sand}, s) \in T_\sigma \Leftrightarrow s \in E_\sigma(\textbf{er sand}) \Leftrightarrow s \in E(SAND(\sigma)) \Leftrightarrow s \in T_\sigma$$

og

$$\begin{aligned} &O_\sigma(\textbf{er sand}, s) \in F_\sigma \Leftrightarrow s \in M_\sigma(\textbf{er sand}) - E_\sigma(\textbf{er sand}) \\ &\quad \Leftrightarrow s \in M(SAND(\sigma)) - E(SAND(\sigma)) \Leftrightarrow s \in S_\sigma - T_\sigma \Leftrightarrow s \in F_\sigma \cup Po_\sigma. \end{aligned}$$

Den første af de to ækvivalenser

$$O_\sigma(\textbf{er sand}, s) \in T_\sigma \Leftrightarrow s \in T_\sigma$$

genkendes som en udgave af Tarskis Skema T, der af Tarski ([Tar94]) benyttedes til at angive en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at **er sand** kunne være en betegnelse for sandhedsbegrebet (et navn for sandhedsprædikatet).

Interne prædikater kan ikke altid som almindelige (eksterne) prædikater blot indføres med navn i et vilkårligt formelt sprog. Hvis vi er givet et normalsprog σ, et n-plads prædikat P over Σ_σ^* og et n-plads prædikatnavn $p \in Pr_\sigma^{(n)}$ er $udvid(\sigma, P, p)$ et sprog med navn for P, men hvis P i stedet er et internt n-plads prædikat er $udvid(\sigma, P(\sigma), p)$ ikke nødvendigvis et sprog med navn for P—dette følger af følgende argument:

> Lad $\tau = udvid(\sigma, P(\sigma), p)$. τ er et sprog med navn for $P(\sigma)$, men for at være et sprog med navn for P skal det være et sprog med navn for $P(\tau)$, og der gælder ikke nødvendigvis $P(\tau) = P(\sigma)$.

Vi skal se en del eksempler på dette fænomen i de følgende afsnit. Konklusionen er at interne prædikater, i modsætning til de sædvanlige (eksterne), ikke trivielt kan finde plads i ethvert tilstrækkelig rigt formelt sprog.

En pointe som vi vil forsøge at drage frem i det følgende er at alle de klassiske paradokser i naturlige sprog bygger på at man i sproget anvender et internt prædikat som kan vises slet ikke at have navn i den type sprog som paradokset formuleres i. I stedet for at se på paradokser i naturlige sprog som "genuine paradokser", kan vi transformere paradokserne til beviser for at de indgående interne prædikater ikke kan have navne i sprogene. Paradokserne opløses dermed som byggende på en implicit, fejlagtig antagelse om de i paradokserne indgående begrebers mulighed for i det hele taget at kunne udtrykkes i sprogene. Vi ser først på Grellings paradoks, som er emnet for det næste afsnit.

Bemærkninger og referencer Distinktionen imellem interne og eksterne begreber er min egen. I de følgende afsnit skal vi se på nogle interne prædikater som ikke har navn i noget formelt sprog. Samtidig skal vi benytte Definition 23 til at vise at det er nok at fjerne ét element fra disse prædikaters meningsområde og ekstension for igen at have et prædikat som kan have navn i et formelt sprog.

6.2 Grellings paradoks

I et formelt sprog σ kan vi have $Pr_\sigma \subseteq K_\sigma$. Det betyder at vi blandt tingene som sprogets virkelighed omhandler inkluderer alle sprogets egne prædikater. Lad os se på et eksempel.

Eksempel 29. Vi tager udgangspunkt i sproget σ fra Eksempel 7. Vi ønsker at udvide dette sprog til et sprog τ med $Pr_\tau \subseteq K_\tau$. Dette kan gøres uden problemer ved at lade

$$Pr_\tau = Pr_\sigma$$

og

$$K_\tau = K_\sigma \cup Pr_\sigma.$$

Da et prædikatnavn nu i en sætning både kan indtage rollen som navnet på en ting og som betegnelse for en egenskab, vil vi i τ ændre lidt på operationen O så det bliver lettere at overskue hvornår et prædikatnavn spiller den ene og hvornår det spiller den anden rolle. Dette kan gøres ved at lade τ være et normalsprog, hvor vi så kræver

$$O_\tau\left(p, (k_1, \ldots, k_n)\right) = p[k_1; \ldots ; k_n]$$

for alle $p \in Pr_\tau^{(n)}$ og alle $k_1, \ldots, k_n \in K_\tau$. Blandt de nye sætninger som τ giver anledning til er

$$\textbf{er gul}\,[\textbf{er gul}] \tag{3}$$
$$\textbf{hjælper mod}\,[\textbf{hovedpine}; \textbf{er rød}] \tag{4}$$

(3) udtrykker at **er gul** er en gul egenskab! Det giver sædvanligvis ikke mening at tillægge en egenskab en farve, så denne sætning må (i en standardsemantik) være poetisk. Umiddelbart ser det ud til at vi ved at tillade $Pr_\tau \subseteq K_\tau$ blot får givet anledning til en masse ny poesi (flere poetiske sætninger), men ikke nye sande eller falske sætninger. Det skyldes dog blot at de egenskaber vi indtil videre har forsøgt at udtrykke i vores sprog (at være gul, osv.) ikke er egenskaber som indeholder andre egenskaber i deres naturlige meningsområde. Men vi kunne f.eks. udvide sproget τ til at omfatte 1-plads prædikatnavnene **er *n*-plads prædikatnavn** for alle $n \in \mathbb{N}$ og udvide definitionen af N_τ tilsvarende med

$$N_\tau(\textbf{er } \boldsymbol{n}\textbf{-plads prædikatnavn}) = \left(Pr_\tau^{(n)}, Pr_\tau\right)$$

hvilket er muligt da $Pr_\tau \subseteq K_\tau$. Da ville gælde

$$\textbf{er 1-plads prædikatnavn}[\textbf{er gul}] \in T_\tau$$

og

$$\textbf{er 2-plads prædikatnavn[hjælper mod]} \in T_\tau.$$

Mere eksotisk ville vi have

$$\textbf{er 1-plads prædikatnavn[er 1-plads prædikatnavn]} \in T_\tau$$

og

$$\textbf{er 2-plads prædikatnavn[er 2-plads prædikatnavn]} \in F_\tau.$$

Inspireret af de to sidste sætninger kan vi indføre følgende definition.

Definition 30. *Lad σ være et formelt sprog med $Pr_\sigma^{(1)} \subseteq K_\sigma$. Et 1-plads prædikatnavn $p \in Pr_\sigma^{(1)}$ siges at være **homologisk** hvis*

$$O_\sigma(p,p) \in T_\sigma$$

*og **heterologisk** hvis*

$$O_\sigma(p,p) \notin T_\sigma.$$

Intuitionen bag de to begreber homologisk og heterologisk er at et 1-plads prædikatnavn kaldes homologisk hvis det selv har den egenskab det udtrykker,og ellers kaldes det heterologisk. I ovenstående eksempel er

er 1-plads prædikatnavn

et eksempel på et homologisk prædikatnavn, mens

er gul og **er 2-plads prædikatnavn**

er heterologiske prædikatnavne. De to sidstnævnte er heterologiske af lidt forskellige årsager. **er gul** er heterologisk fordi

$$O_\tau(\textbf{er gul}, \textbf{er gul})$$

er poetisk, dvs. da **er gul** ikke er med i **er gul**'s meningsområde, mens **er 2-plads prædikatnavn** er heterologisk fordi

$$O_\tau(\textbf{er 2-plads prædikatnavn}, \textbf{er 2-plads prædikatnavn})$$

er falsk. Bemærk at egenskaben at være et homologisk prædikatnavn og egenskaben at være et heterologisk prædikatnavn kun giver mening for formelle sprog σ med $Pr_\sigma^{(1)} \subseteq K_\sigma$, da $O_\sigma(p,p)$ ikke er veldefineret for eventuelle $p \in Pr_\sigma^{(1)} - K_\sigma$.

Definition 31. *Vi definerer et internt prædikat HOM ved*

$$\begin{aligned} HOM(\sigma) &= \left(\left\{p \in Pr_\sigma^{(1)} \mid p \textit{ er homologisk}\right\}, Pr_\sigma^{(1)}\right) \\ &= \left(\left\{p \in Pr_\sigma^{(1)} \mid O_\sigma(p,p) \in T_\sigma\right\}, Pr_\sigma^{(1)}\right) \\ &= \left(\left\{p \in Pr_\sigma^{(1)} \mid p \in E_\sigma(p)\right\}, Pr_\sigma^{(1)}\right) \end{aligned}$$

og et internt prædikat HET ved

$$\begin{aligned} HET(\sigma) &= \left(\left\{p \in Pr_\sigma^{(1)} \mid p \textit{ er heterologisk}\right\}, Pr_\sigma^{(1)}\right) \\ &= \left(\left\{p \in Pr_\sigma^{(1)} \mid p \notin E_\sigma(p)\right\}, Pr_\sigma^{(1)}\right). \end{aligned}$$

HOM er altså det interne prædikat som i sit meningsområde har alle 1-plads prædikatnavne og som sin ekstension har alle homologiske prædikatnavne. Det betyder at hvis **er homologisk** antages at være et navn for HOM i et normalsprog σ, da vil gælde

er homologisk$[p] \in T_\sigma \Leftrightarrow p$ er et homologisk 1-plads prædikatnavn i σ.
er homologisk$[p] \in F_\sigma \Leftrightarrow p$ er et heterologisk 1-plads prædikatnavn i σ.

Hvis vi i en udvidelse ν af sproget τ fra Eksempel 29 havde navnet **er homologisk** for prædikatet HOM, ville således f.eks. gælde

er homologisk[**er 1-plads prædikatnavn**] $\in T_\nu$.
er homologisk[**er 2-plads prædikatnavn**] $\in F_\nu$.

Noget tilsvarende kan siges om det interne prædikat HET. Men vi har følgende resultat.

Teorem 32 (Anden begrænsning). *Der eksisterer ikke noget formelt sprog med navn for HET.*

Bevis Vi benytter Lemma 21, dvs. igen essentielt et diagonalargument. Antag at σ er et sprog med navn for HET. Da må gælde $Pr_\sigma^{(1)} \subseteq K_\sigma$ idet $Pr_\sigma^{(1)}$ er meningsområdet for $HET(\sigma)$. I Lemma 21 kan vi da lade $A = Pr_\sigma^{(1)}$ og lade $I : A \to \mathcal{P}(K_\sigma)$ være afbildningen $E_\sigma \upharpoonright Pr_\sigma^{(1)}$. Der gælder da $\operatorname{ran}(I) = E_\sigma(Pr_\sigma^{(1)})$. Vi har nu

$$\overline{\Delta}_I = \overline{\Delta}_{E_\sigma \upharpoonright Pr_\sigma^{(1)}} = \left\{x \in Pr_\sigma^{(1)} \mid x \notin E_\sigma(x)\right\} = E\left(HET(\sigma)\right)$$

og derfor kan $HET(\sigma)$ ikke have navn i σ ifølge Lemma 21. $\square$

Begreberne homologisk og heterologisk prædikat er hentet fra Grellings paradoks (1908). Paradokset har nøjagtig det samme strukturelle indhold som barberens paradoks. Paradokset opløses af ovenstående Teorem, da den "fejl" der bliver begået i paradokset er en stiltiende antagelse af at det interne begreb at være heterologisk, her formaliseret som det interne prædikat HET, nødvendigvis må have navn i sproget. Hvis vi antog at het var et 1-plads prædikatnavn for prædikatet HET i et formelt sprog σ ville vi have

$$E_\sigma(het) = E(HET(\sigma)) = \left\{ p \in Pr_\sigma^{(1)} \mid p \notin E_\sigma(p) \right\}$$

og dermed

$$\begin{array}{c} het \in E_\sigma(het) \\ \Updownarrow \\ het \notin E_\sigma(het). \end{array} \tag{5}$$

Dette er Grellings paradoks, oversat til den ramme af formelle sprog vi i denne afhandling arbejder indenfor.[10] Problemet kan helt analogt til barberens paradoks opfattes at være det at prædikatet heterologisk defineres ved en antidiagonal $\overline{\Delta}_{E_\sigma \restriction Pr_\sigma^{(1)}}$, og hvis dette prædikat skulle have et navn het i σ ville $E_\sigma(het)$ være defineret ved

$$E_\sigma(het) = \overline{\Delta}_{E_\sigma \restriction Pr_\sigma^{(1)}}$$

hvilket er en rekursiv definition af en værdi af E_σ ved E_σ selv, og denne rekursive definition har, som vi ser af ovenstående Teorem, intet definandum.

I Eksempel 29 bemærkede vi at kravet $Pr_\sigma \subseteq K_\sigma$ giver anledning til at et prædikatnavn i en sætning både kan indtage rollen som navnet på en ting og som betegnelse for en egenskab. Specielt kan vi have sætninger hvori samme prædikatnavn optræder i begge roller, som det er tilfældet med alle sætninger af typen

$$O_\sigma(p, p)$$

hvor $p \in Pr_\sigma^{(1)}$. En sætning af denne type vil vi i det følgende kalde for en **diagonalsætning**. Det er en diagonalsætning som frembringer Grellings paradoks, hvilket ses af følgende omskrivning af (5):

$$\begin{array}{c} O_\sigma\,(het, het) \in T_\sigma \\ \Updownarrow \\ O_\sigma\,(het, het) \notin T_\sigma \end{array}$$

Sætningen $O_\sigma\,(het, het)$ udtrykker at egenskaben at være heterologisk selv er en heterologisk egenskab. Egentlig ville det vil være rimeligt hvis en

[10] Vi har faktisk hermed givet et endnu enklere bevis for Teorem 32, men vi vælger alligevel det lidt mere besværlige—omend dybest set identiske—bevis, da vi som en pointe for senere ønsker at vise at prædikatet heterologisk, HET, kan udtrykkes som en antidiagonal $\overline{\Delta}_I$ ved passende valg af I.

sådan sætning blev opfattet som poetisk i det pågældende sprog, som vi f.eks. har gjort det med diagonalsætningen $O_\sigma\,(\mathbf{er\ gul}, \mathbf{er\ gul})$. Vi får ikke umiddelbart problemer ved at opfatte alle sætninger

$$O_\sigma\,(het, k)$$

som påstandsfremsættende sætninger så længe $k \neq het$—kun med $k = het$ får vi en lidt patologisk sætning. Men som prædikatet heterologisk er defineret er $O_\sigma\,(het, het)$ tvunget til at være en påstandsfremsættende sætning. Lad os se nærmere på dette. Lad σ være et normalsprog med $Pr_\sigma \subseteq K_\sigma$. Hvis vi ønsker at udvide σ til et normalsprog τ med navn for $HET(\tau)$, bliver τ nødt til at være et sprog med $Pr_\tau \subseteq K_\tau$, og derfor må vi egentlig udvide sproget med *to* navne: dels prædikatnavnet het og samtidig konstantnavnet het. Vi definerer altså

$$K_\tau = K_\sigma \cup \{het\}$$
$$Pr_\tau^{(1)} = Pr_\sigma^{(1)} \cup \{het\}$$

og lader $Pr_\tau^{(n)} = Pr_\sigma^{(n)}$ for $n \geq 2$, hvorved

$$Pr_\tau = Pr_\sigma \cup \{het\} \subseteq K_\sigma \cup \{het\} = K_\tau.$$

Dermed gives navnet het mulighed for at optræde på to niveauer, dels på prædikatnavnsniveau og dels på konstantnavnsniveau. "Paradokset" opstår når het benyttes på begge niveauer i samme sætning. De to niveauer, prædikatnavnsniveau og konstantnavnsniveau, er betydningsmæssigt knyttet sammen via navngivningsafbildningen, men prædikatet heterologisk defineres netop så det bryder med denne betydningsmæssige sammenknytning, og derved opstår et "paradoks". $O_\tau\,(het, het)$ er tvunget til at være en påstandsfremsættende sætning da $M(HET(\tau)) = Pr_\tau^{(1)}$. Problemet er at vi ved at indføre prædikatnavnet het også samtidigt udvider mængden af konstanter med konstantnavnet het, og dette konstantnavn udvider prædikatnavnet het's meningsområde—selvom konstantnavnet het ligger udenfor det meningsområde vi egentlig tilsigtede prædikatnavnet het skulle have. Ser vi i τ på $HET(\sigma)$ istedet for $HET(\tau)$ får vi følgende positive resultat.

Teorem 33. *Lad σ være et normalsprog med $Pr_\sigma \subseteq K_\sigma$. σ kan udvides til et normalsprog τ med $Pr_\tau \subseteq K_\tau$ og navn for $HET(\sigma)$.*

Bevis Vi kan uden indskrænkning antage at $\Sigma_\sigma^* - Pr_\sigma$ er ikke-tom (hvis dette ikke er tilfældet kan vi starte med at udvide σ's alfabet med et nyt symbol, hvilket vil resultere i at den pågældende mængde bliver ikke-tom). Lad het betegne et element i $\Sigma_\sigma^* - Pr_\sigma$. Lad

$$\nu = udvid(\sigma, HET(\sigma), het).$$

ν er nu et normalsprog med navn for $HET(\sigma)$, og hvis vi udvider ν med konstantnavnet *het* uden at ændre på semantikken for sproget, får vi et sprog τ hvor

$$Pr_\tau = Pr_\nu = Pr_\sigma \cup \{het\} \subseteq K_\sigma \cup \{het\} = K_\nu \cup \{het\} = K_\tau$$

som ønsket. $\square$

Bemærk at vi i sproget τ som konstrueres ovenfor har

$$M(HET(\tau)) = Pr_\tau^{(1)} = Pr_\sigma^{(1)} \cup \{het\} = M(HET(\sigma)) \cup \{het\}$$

og, idet $het \notin E(HET(\sigma)) = E_\tau(het)$,

$$\begin{aligned} E(HET(\tau)) &= \left\{ p \in Pr_\tau^{(1)} \mid p \notin E_\tau(p) \right\} \\ &= \left\{ p \in Pr_\sigma^{(1)} \cup \{het\} \mid p \notin E_\tau(p) \right\} \\ &= \left\{ p \in Pr_\sigma^{(1)} \mid p \notin E_\sigma(p) \right\} \cup \{het\} \\ &= E(HET(\sigma)) \cup \{het\} \end{aligned}$$

Den eneste forskel på prædikaterne $HET(\tau)$ og $HET(\sigma)$ er altså at *het* ikke er med i $HET(\sigma)$'s meningsområde. Dette betyder at τ "næsten" indeholder et navn for *HET*: det eneste der gør at *het* ikke er navn for $HET(\tau)$ i τ er at $O_\tau(het, het)$ er poetisk i stedet for at være enten sand eller falsk. *het* er altså navn for en selv-ekskluderende variant af *HET*, som lader $O_\tau(het, het)$ være poetisk men ellers opfylder det ønskede, nemlig at vi for alle 1-plads prædikatnavne p ($\neq het$) i τ har

$$O_\tau(het, p) \in T_\tau \Leftrightarrow p \text{ er et heterologisk 1-plads prædikatnavn i } \tau.$$

Vi kan således omformulere Teorem 33 til følgende resultat, som bør sammenholdes med resultatet i Teorem 32.

Teorem 34. *Lad σ være et normalsprog med $Pr_\sigma \subseteq K_\sigma$ og* het $\in \Sigma_\sigma^* - Pr_\sigma$. *$\sigma$ kan udvides til et normalsprog τ med $Pr_\tau \subseteq K_\tau$, hvor* het *er et navn for HET^- defineret ved*

$$\begin{aligned} M(HET^-) &= M(HET(\tau)) - \{het\} \\ E(HET^-) &= E(HET(\tau)) - \{het\} \end{aligned}$$

Bevis Lad τ være defineret udfra σ som i beviset for Teorem 33. Da har τ navn for $HET(\sigma)$, og ifølge ovenstående gælder

$$\begin{aligned} M(HET(\tau)) &= M(HET(\sigma)) \cup \{het\} \\ E(HET(\tau)) &= E(HET(\sigma))) \cup \{het\} \end{aligned}$$

og heraf

$$\begin{aligned} M(HET(\sigma)) &= M(HET(\tau)) - \{het\} \\ E(HET(\sigma)) &= E(HET(\tau))) - \{het\} \end{aligned}$$

der viser at $HET(\sigma)$ netop er prædikatet HET^- som vi ønskede at give navn i τ. $\square$

Bemærkninger og referencer Indholdet af dette afsnit er baseret på egne overvejelser.

6.3 Epimenides' paradoks

Grellings paradoks, som vi har diskuteret ovenfor, falder ind under en klasse af paradokser i naturlige sprog der kaldes de **semantiske paradokser**. De semantiske paradokser bygger alle på sætninger hvori et eller andet internt semantisk begreb indgår. Ved et internt semantisk begreb forstås et begreb som er en del af sprogets semantik eller et heraf afledt begreb. I forbindelse med formelle sprog er begreberne sandhed og falskhed begreber som hver især udgør en del af sprogets semantik, og begrebet "navn for" er et eksempel på et heraf afledt begreb. Alle disse tre begreber går således ind under det vi kalder for interne semantiske begreber. Det mest kendte af de semantiske paradokser er Epimenides' paradoks, som allerede var kendt i antikken. Paradokset kaldes også for løgnerparadokset. Løgnerparadokset kan formuleres på mange forskellige måder, f.eks. som sætningen

> Denne sætning er falsk.

Hvis vi antager at sætningen er påstandsfremsættende, bliver vi ledt til et paradoks på følgende måde: antag først at sætningen er sand. Da må den mulige kendsgerning som sætningen udtrykker faktisk foreligge, og denne kendsgerning er at sætningen er falsk. Antag da i stedet at sætningen er falsk. Da foreligger den kendsgerning som sætningen udtrykker *ikke*, dvs. det er ikke tilfældet at sætningen er falsk, og derfor må den være sand. Ligegyldigt om vi antager at sætningen er sand eller falsk bliver vi altså ledt til en modstrid. Men dette gælder kun hvis vi antager at sætningen nødvendigvis *må* være påstandsfremstættende. Hvis vi giver slip på denne antagelse giver ovenstående argument ikke et paradoks, men derimod et bevis for at sætningen er poetisk, idet argumentet viser at både under antagelsen af at sætningen er sand og under antagelsen af at den er falsk får vi en modstrid. At opfatte sætningen "denne sætning er falsk" som en sætning der giver anledning til et paradoks, er altså kun en opfattelse vi kan fastholde hvis vi kan komme med en (meget) god grund til at sætningen må være påstandsfremsættende. For at diskutere dette på et fornuftigt grundlag flytter vi os igen til rammen af formelle sprog. Vi begrænser os i denne omgang til at se på formelle sprog hvor alle prædikatnavne er 1-plads prædikatnavne. Alle definitioner og resultater vil uden videre kunne generaliseres til sprog hvor dette ikke er tilfældet, men dette ville gøre fremstillingen væsentlig mere teknisk snavset.

Sætningen "denne sætning er falsk" består af de to udtryk "denne sætning" og "er falsk". Udtrykket "denne sætning" er navnet på en ting, nemlig den pågældende sætning selv, og udtrykket "er falsk" er navnet på en egenskab, nemlig egenskaben at være falsk. I et formelt sprog ville udtrykket "denne sætning" således være det vi kalder et konstantnavn og udtrykket "er falsk" ville være det vi kalder et 1-plads prædikatnavn. I et formelt sprog

σ ville sætningen "denne sætning er falsk" således få et udseende i stil med

$$O_\sigma\left(\text{"er falsk"}, \text{"denne sætning"}\right).$$

I en standardsemantik skal konstantnavnet "denne sætning" i enhver sætning $s \in S_\sigma$ hvori det indgår betegne sætningen s selv. Dette konstantnavn er grundlæggende forskelligt fra de konstantnavne vi i eksempler hidtil har set på, idet at dette konstantnavn ikke skal benyttes til at betegne en enkel fast ting, men betegne forskellige ting (forskellige sætninger) afhængigt af den sætning hvori konstantnavnet indgår. Vi kunne kalde konstantnavnet for et *kontekstafhængigt* konstantnavn. Bemærk at vi i de sprog man sædvanligvis møder i matematisk logik (1. ordens sprog, o.s.v.), hvor en sætnings sandhedsværdi bliver fastlagt udfra uafhængige fortolkninger af sætningens bestanddele, ikke har muligheden for at operere med kontekstafhængige konstantnavne. Lad $p \in Pr_\sigma^{(1)}$. Vi ønsker at sætningen

$$O_\sigma(p, \text{"denne sætning"})$$

skal udtrykke at den selv har egenskaben betegnet af p, dvs. vi ønsker at der skal gælde

$$O_\sigma\left(p, \text{"denne sætning"}\right) \ \sim_\sigma \ O_\sigma\left(p, O_\sigma\left(p, \text{"denne sætning"}\right)\right).$$

For at sikre at dette giver mening kræver vi $S_\sigma \subseteq K_\sigma$. Vi præciserer

Definition 35. *Lad σ være et formelt sprog med $S_\sigma \subseteq K_\sigma$ og $Pr_\sigma = Pr_\sigma^{(1)}$. σ kaldes et sprog med **direkte selvreference** hvis der eksisterer et konstantnavn d i sproget opfyldende*

$$O_\sigma\left(p, d\right) \ \sim_\sigma \ O_\sigma\left(p, O_\sigma\left(p, d\right)\right)$$

for alle $p \in Pr_\sigma^{(1)}$.

Lad $s = O_\sigma(p, d)$ og $t = O_\sigma\left(p, O_\sigma(p, d)\right)$, hvor p og d er som i definitionen ovenfor. Bemærk at $t = O_\sigma(p, s)$, dvs. t fremkommer af s ved at erstatte d i s med s selv. Betingelsen i ovenstående definition kan derfor reformuleres på følgende måde: enhver sætning $s = O_\sigma(p, d)$ er ækvivalent med sætningen t der opstår ved i s at erstatte d med s. Vi kan altså opfatte d i sætningen $s = O_\sigma(p, d)$ som et navn for eller en forkortelse for sætningen s selv. Dette betyder at sætningen s igennem konstantnavnet d opnår at *referere til sig selv*, hvilket forklarer at vi benytter betegnelsen *selvreference* for fænomenet.

Følgende lemma viser at i et sprog med direkte selvreference vil ethvert 1-plads prædikatnavn som har alle sprogets sætninger i sit meningsområde også have konstantnavnet d i sit meningsområde.

Lemma 36. *Lad σ være et formelt sprog med $S_\sigma \subseteq K_\sigma$ og $Pr_\sigma = Pr_\sigma^{(1)}$, hvor $d \in K_\sigma$ opfylder betingelsen for direkte selvreference. Hvis $p \in Pr_\sigma^{(1)}$ med $M_\sigma(p) \supseteq S_\sigma$ så gælder $d \in M_\sigma(p)$.*

Bevis Da $O_\sigma(p,d) \in S_\sigma$ og $M_\sigma(p) \supseteq S_\sigma$ må gælde

$$O_\sigma\left(p, O_\sigma(p,d)\right) \in T_\sigma \cup F_\sigma.$$

Ifølge betingelsen for direkte selvreference fås da

$$O_\sigma(p,d) \in T_\sigma \cup F_\sigma$$

og hermed $d \in M_\sigma(p)$. $\square$

I en standardsemantik ønsker vi at prædikatnavnet "er falsk" som sin ekstension har mængen af falske sætninger i det pågældende sprog (F_σ i sproget σ). Samtidig ville det være naturligt at tænke på "er falsk" som et prædikatnavn hvis meningsområde er mængden af alle sætningerne i sproget (S_σ i sproget σ). Men som ovenstående lemma viser, er dette ikke muligt i et sprog med direkte selvreference. Hvis vi i et sprog med direkte selvreference vil have alle sprogets sætninger med i "er falsk"'s meningsområde, er vi tvunget til også at have d med i dette meningsområde, og dermed bliver

$$O_\sigma(\text{“er falsk”}, \text{“denne sætning”})$$

hvor d = "denne sætning" tvunget til at være en påstandsfremsættende sætning. Men som vi har set leder dette til et paradoks. "Paradokset" kan reformuleres på følgende måde.

Teorem 37 (Tredje begrænsning). *Lad σ være et formelt sprog med $S_\sigma \subseteq K_\sigma$, $Pr_\sigma = Pr_\sigma^{(1)}$ og direkte selvreference. Der eksisterer ikke noget prædikatnavn i σ med ekstension F_σ og meningsområde $\supseteq S_\sigma$.*

Bevis Vi fører beviset indirekte. Antag at σ er et formelt sprog med et 1-plads konstantnavn *denne sætning* opfyldende betingelsen for direkte selvreference og et 1-plads prædikatnavn *er falsk* med ekstension F_σ og meningsområde $\supseteq S_\sigma$. Da fås

$$\begin{array}{rl} & O_\sigma(\textit{er falsk}, \textit{denne sætning}) \in T_\sigma \\ \begin{array}{l}\text{ifølge definitionen}\\ \text{af } \textit{denne sætning}\end{array} \Big\Updownarrow & \\ & O_\sigma\left(\textit{er falsk}, O_\sigma(\textit{er falsk}, \textit{denne sætning})\right) \in T_\sigma \\ \Updownarrow & \\ & O_\sigma(\textit{er falsk}, \textit{denne sætning}) \in E_\sigma(\textit{er falsk}) \\ \begin{array}{l}\text{ifølge definitionen}\\ \text{af } \textit{er falsk}\end{array} \Big\Updownarrow & \\ & O_\sigma(\textit{er falsk}, \textit{denne sætning}) \in F_\sigma. \end{array}$$

Men idet $M_\sigma(\textit{er falsk}) \supseteq S_\sigma$ har vi samtidig ifølge ovenstående lemma at *denne sætning* $\in M_\sigma(\textit{er falsk})$, dvs.

$$O_\sigma(\textit{er falsk}, \textit{denne sætning}) \in T_\sigma \cup F_\sigma$$

hvilket er i modstrid med den netop viste ækvivalens. $\square$

Vi har altså vist at i sprog σ med direkte selvreference kan vi ikke udtrykke mængden af falske sætninger. Beviset baseres på det argument, at hvis et sådan sprog eksisterede måtte sætningen

$$O_\sigma(\textit{er falsk}, \textit{denne sætning})$$

være påstandsfremsættende, idet udtrykket *denne sætning* betegner en sætning (sætningen selv)—men hvis vi regner den nævnte sætning som påstandsfremsættende, vil det være en sætning som "modsiger sig selv" ved at den påstår sin egen falskhed, og derfor vil være falsk netop når den er sand, altså en modstrid. Men da en sætning som modsiger sig selv naturligvis er ganske patologisk, kan vi måske godt forsvare at udelukke denne type sætning fra "er falsk" 's meningsområde og så opfatte sætningen som poetisk, hvorved selvmodsigelsen forsvinder. Epimenides' paradoks opstår fordi vi synes at enhver sætning

$$O_\sigma(\textit{er falsk}, s)$$

hvor $s \in S_\sigma$ må være påstandsfremsættende, men dette giver anledning til nogle uventede sygeligheder i sprog med direkte selvreference. Denne erfaring rigere, kan vi ikke længere lade det være oplagt at $O_\sigma(\textit{er falsk}, s)$ er påstandsfremsættende, når vi samtidig har mulighed for direkte selvreference. I sprog med direkte selvreference bør *er falsk* have et meningsområde som ekskluderer konstantnavnet

$$\textit{denne sætning}$$

Men idet

$$O_\sigma(\textit{er falsk}, \textit{denne sætning}) \ \sim_\sigma O_\sigma(\textit{er falsk}, O_\sigma(\textit{er falsk}, \textit{denne sætning}))$$

må vi dermed også ekskludere sætningen

$$O_\sigma(\textit{er falsk}, \textit{denne sætning})$$

fra *er falsk*'s meningsområde. Følgende teorem viser at dette er en realiserbar måde at "undgå paradokset" på.

Teorem 38. *Lad σ være et normalsprog med $S_\sigma \subseteq K_\sigma$, $Pr_\sigma = Pr_\sigma^{(1)}$ og direkte selvreference. σ kan udvides til et sprog τ med $S_\tau \subseteq K_\tau$, direkte selvreference og navn for prædikatet falsk i σ, $FALSK(\sigma)$.*

Bevis $FALSK(\sigma)$ er ifølge Definition 28 givet som

$$FALSK(\sigma) = (F_\sigma, S_\sigma)$$

Som tidligere kan vi uden indskrænkning antage at $\Sigma_\sigma^* - Pr_\sigma^{(1)}$ er ikke-tom. Vi udvælger et element f i denne mængde og lader

$$\nu = udvid(\sigma, FALSK(\sigma), f).$$

ν er da et normalsprog med navn for $FALSK(\sigma)$. ν udvides til et sprog τ hvor K_τ defineres rekursivt ved

(i) Hvis $k \in K_\nu$ så $k \in K_\tau$.

(ii) Hvis $p \in Pr_\nu$ og $k \in K_\tau$ så $p[k] \in K_\tau$.

Resten af elementerne i τ lader vi være som i ν. Nu fås

$$\begin{aligned} S_\tau = \operatorname{ran}(O_\tau) = \{p[k] \mid p \in Pr_\tau \text{ og } k \in K_\tau\} \\ = \{p[k] \mid p \in Pr_\nu \text{ og } k \in K_\tau\} \subseteq K_\tau \end{aligned}$$

som ønsket. Vi mangler blot at vise at τ er et sprog med direkte selvreference. Lad d betegne et konstantnavn i K_σ som opfylder betingelsen for direkte selvreference i σ. Vi har da for alle $p \in Pr_\sigma^{(1)}$

$$p[d] \ \sim_\sigma \ p[p[d]]$$

og da $M_\tau(p) = M_\nu(p) = M_\sigma(p)$ og $E_\tau(p) = E_\nu(p) = E_\sigma(p)$ gælder

$$p[d] \ \sim_\tau \ p[p[d]]$$

for alle $p \in Pr_\sigma^{(1)}$. Da $Pr_\tau = Pr_\nu = Pr_\sigma \cup \{f\}$ mangler vi blot at vise

$$f[d] \ \sim_\tau \ f[f[d]].$$

Da f i τ er navn for $FALSK(\sigma)$ har vi $E_\tau(f) = F_\sigma$ og $M_\tau(f) = S_\sigma$. Idet $d \notin S_\sigma$ har vi $d \notin M_\tau(f)$, dvs. $f[d] \in Po_\tau$, og idet $f[d] \notin S_\sigma$ har vi $f[f[d]] \in Po_\tau$. Da både $f[d]$ og $f[f[d]]$ således er elementer i mængden Po_τ er de ækvivalente i τ. τ er hermed vist at opfylde det ønskede. $\square$

I ovenstående teorem er f's meningsområde defineret som S_σ, der er lig mængden af sætninger i S_τ hvori f ikke indgår (idet $S_\tau \subseteq K_\tau$ hvor alle elementer i K_τ er opbygget af elementer i K_σ og $Pr_\sigma \cup \{f\}$). f betegner altså en egenskab—egenskaben at være en falsk sætning—som kun meningsfyldt kan tillægges sætninger hvori prædikatnavnet f ikke selv indgår. Og som Teorem 37 viser er denne begrænsning nødvendig, i hvert fald i sprog med direkte selvreference.

Vi kan foretage en omformulering af Teorem 38 i stil med hvad vi gjorde i Teorem 34.

Teorem 39. *Lad σ være et normalsprog med $S_\sigma \subseteq K_\sigma$, $Pr_\sigma = Pr_\sigma^{(1)}$, $f \in \Sigma_\sigma^* - Pr_\sigma$ og direkte selvreference. σ kan udvides til et sprog τ med $S_\tau \subseteq K_\tau$ og direkte selvreference, hvor f er navn for prædikatet $FALSK^-$ givet ved*

$$M(FALSK^-) = S_\tau - \{s \in S_\tau \mid \textit{prædikatnavnet } f \textit{ indgår i } s\}$$
$$E(FALSK^-) = F_\tau - \{s \in F_\tau \mid \textit{prædikatnavnet } f \textit{ indgår i } s\}$$

Bevis Lad τ være defineret udfra σ som i beviset for Teorem 38. Da har τ navn for $FALSK(\sigma)$, og det ses let på samme måde som i beviset for Teorem 34 at der gælder

$$FALSK(\sigma) = FALSK^-$$

hvorved det ønskede er vist. □

Teorem 38 og Teorem 39 giver kun brugbare resultater hvis vi kan vise at der eksisterer normalsprog σ med $S_\sigma \subseteq K_\sigma$, $Pr_\sigma = Pr_\sigma^{(1)}$ og direkte selvreference. Derfor giver vi nu et eksempel på et sådant sprog.

Eksempel 40. Lad τ være normalsproget fra Eksempel 29 faregnet **hjælper mod** som er et 2-plads prædikatnavn. Vi ønsker at udvide τ til et normalsprog ν med direkte selvreference. Vi definerer først en normalsyntaks for ν. Pr_ν lader vi være Pr_τ udvidet med 1-plads prædikatnavnene **er sætning** og **er selvrefererende**. K_ν defineres rekursivt ved

(i) **denne sætning** $\in K_\nu$.

(ii) Hvis $k \in K_\tau$ så $k \in K_\nu$.

(iii) Hvis $p \in Pr_\nu$ og $k \in K_\nu$ så $p[k] \in K_\nu$.

Bemærk at vi med denne definition får

$$\begin{aligned} S_\nu = ran(O_\nu) = \left\{p[k] \,\middle|\, p \in Pr_\nu^{(1)} \text{ og } k \in K_\nu\right\} \\ = K_\nu - (K_\tau \cup \{\textbf{denne sætning}\}) \end{aligned}$$

hvilket sikrer at $S_\nu \subseteq K_\nu$. Til den givne normalsyntaks ønsker vi at knytte en tilhørende navngivningsafbildning N_ν, således at det fremkomne normalsprog bliver et sprog hvori konstantnavnet **denne sætning** opfylder betingelsen for direkte selvreference. Vi lader $N_\nu(p) = N_\tau(p)$ for alle $p \in Pr_\tau \subseteq Pr_\nu$. Vi lader

$$N_\nu(\textbf{er sætning}) = (S_\nu \cup \{\textbf{denne sætning}\}, K_\nu)\,.$$

Dermed fås f.eks.

$$\textbf{er sætning}[\textbf{er gul}] \in F_\nu \tag{6}$$
$$\textbf{er sætning}[\textbf{er gul}[\textbf{er gul}]] \in T_\nu \tag{7}$$
$$\textbf{er sætning}[\textbf{denne sætning}] \in T_\nu \tag{8}$$
$$\textbf{er sætning}[\textbf{er sætning}[\textbf{denne sætning}]] \in T_\nu \tag{9}$$

Vi lader prædikatet $N_\nu(\textbf{er selvrefererende})$ have meningsområdet

$$M_\nu(\textbf{er selvrefererende}) = E_\nu(\textbf{er sætning}) = S_\nu \cup \{\textbf{denne sætning}\}$$

og lader ekstensionen $E_\nu(\textbf{er selvrefererende})$ være defineret rekursivt ved

(i) **denne sætning** $\in E_\nu(\textbf{er selvreferende})$.

(ii) Hvis $p \in Pr_\nu$ og $k \in E_\nu(\textbf{er selvreferende})$ så $p[k] \in E_\nu(\textbf{er selvreferende})$.

Hermed fås f.eks.

$$\textbf{er selvrefererende}[\textbf{er gul}[\textbf{er gul}]] \in F_\nu \tag{10}$$
$$\textbf{er selvrefererende}[\textbf{er en dårlig følelse}[\textbf{denne sætning}]] \in T_\nu \tag{11}$$
$$\textbf{er selvrefererende}[\textbf{denne sætning}] \in T_\nu \tag{12}$$
$$\textbf{er selvrefererende}[\textbf{er selvrefererende}[\textbf{denne sætning}]] \in T_\nu \tag{13}$$

For at bevise at det fremkomne sprog er et sprog med direkte selvreference skal vi påvise at der for alle $p \in Pr_\nu$ gælder

$$O_\nu(p, \textbf{denne sætning}) \ \sim_\nu \ O_\nu(p, O_\nu(p, \textbf{denne sætning})). \tag{14}$$

For $p \in Pr_\tau$ har vi

$$M_\nu(p) = M_\tau(p) \subseteq K_\tau = K_\nu - (S_\nu \cup \{\textbf{denne sætning}\})$$

hvorfor

$$O_\nu(p, \textbf{denne sætning}) \in Po_\nu$$

og

$$O_\nu(p, s) \in Po_\nu \text{ for alle } s \in S_\nu.$$

Ved at lade $s = O_\nu(p, \textbf{denne sætning})$ viser de to ovenstående formler at ækvivalensen (14) holder for alle $p \in Pr_\tau$. For $p =$ **er sætning** bevises ækvivalensen af (8) og (9) ovenfor, og for $p =$ **er selvrefererende** bevises ækvivalensen af (12) og (13). Dette viser at ækvivalensen er opfyldt for alle $p \in Pr_\nu$, og ν er hermed vist at være et sprog med direkte selvreference.

Bemærkninger og referencer Indholdet af dette afsnit er baseret på egne overvejelser.

6.4 Tarskis Teorem

Ovenfor viser vi at det interne prædikat *FALSK* som introduceret i Definition 28 ikke har navn i noget formelt sprog med direkte selvreference. Umiddelbart kan det virke som om denne begrænsning hænger mere på problemer med at håndtere selvreference på en fornuftig måde i et sprog end problemer med at have navn for et internt begreb som falskhed i et sprog. I dette afsnit skal vi dog vise at det ikke forholder sig helt sådan, idet vi skal vise at kravet om direkte selvreference i Teorem 37 kan erstattes med forudsætninger som forekommer væsentligt mindre kritiske og som er forudsætninger der typisk vil være opfyldte i formelle sprog formaliserende dele af matematikken.

Definition 41. *Lad σ være et formelt sprog og lad R være en $(m+1)$-plads relation over mængden af relationer over K_σ. σ siges at være* ***lukket under*** *R hvis der for alle relationer $P_1, \dots, P_m, Q$ over K_σ gælder*

$$P_1, \dots, P_m \in \operatorname{ran}(E_\sigma) \wedge (P_1, \dots, P_m, Q) \in R \Rightarrow Q \in \operatorname{ran}(E_\sigma)$$

dvs. hvis $P_1, \dots, P_m$ alle har navne i σ og $(P_1, \dots, P_m, Q) \in R$ så har Q også navn i σ.

Teorem 42. *Lad σ være et formelt sprog med $Pr_\sigma \cup S_\sigma \subseteq K_\sigma$. Lad $o_\sigma = O_\sigma \restriction Pr_\sigma^{(1)}$ og lad $d_\sigma : K_\sigma \to K_\sigma^2$ være givet ved $d_\sigma(x) = (x, x)$. Hvis σ er lukket under afbildningerne*

$$o_\sigma^{-1} : \mathcal{P}(S_\sigma) \to \mathcal{P}(Pr_\sigma^{(1)} \times K_\sigma)$$

og

$$d_\sigma^{-1} : \mathcal{P}(K_\sigma^2) \to \mathcal{P}(K_\sigma)$$

har F_σ (og dermed FALSK) ikke navn i σ.

Bevis Antag mængden F_σ har navn i σ. Da σ er lukket under o_σ^{-1} har mængden $A = o_\sigma^{-1}(F_\sigma)$ så ligeledes navn i σ. Denne mængde kan skrives

$$A = o_\sigma^{-1}(F_\sigma) = \left\{(p, k) \in Pr_\sigma^{(1)} \times K_\sigma \mid O_\sigma(p, k) \in F_\sigma\right\}.$$

Idet σ er lukket under d_σ^{-1} har mængden $B = d_\sigma^{-1}(A)$ navn i σ. Denne mængde kan skrives

$$\begin{aligned}
B &= d_\sigma^{-1}(A) \\
&= \{x \in K_\sigma \mid (x, x) \in A\} \\
&= \left\{x \in Pr_\sigma^{(1)} \mid O_\sigma(x, x) \in F_\sigma\right\} \\
&= \left\{x \in Pr_\sigma^{(1)} \mid x \in M_\sigma(x) - E_\sigma(x)\right\} \\
&= \left\{x \in Pr_\sigma^{(1)} \mid x \notin E_\sigma(x) \cup \overline{M_\sigma(x)}\right\} \\
&= \overline{\Delta}_I
\end{aligned}$$

hvor $I : Pr_\sigma^{(1)} \to \mathcal{P}(K_\sigma)$ er givet ved $I(x) = E_\sigma(x) \cup \overline{M_\sigma(x)}$. Der gælder $\mathrm{ran}(I) \supseteq E_\sigma(Pr_\sigma^{(1)})$ og derfor har mængden $B = \overline{\Delta}_I$ ikke navn i σ ifølge det specialiserede diagonalargument, Lemma 21. Dette er en modstrid. $\square$

Vi siger at et sprog σ er **lukket under komplementering**, hvis der for enhver mængde $A \in K_\sigma^n$ med $A \in \mathrm{ran}(E_\sigma)$ gælder $K_\sigma^n - A \in \mathrm{ran}(E_\sigma)$. Mængden $K_\sigma^n - A$ skrives kort $\complement A$.

Teorem 43 (Tarskis Teorem). *Lad σ være et formelt sprog med $Pr_\sigma \cup S_\sigma \subseteq K_\sigma$ og lukket under*

- *afbildningen $o_\sigma^{-1} : \mathcal{P}(S_\sigma) \to \mathcal{P}(Pr_\sigma^{(1)} \times K_\sigma)$*
- *afbildningen $d_\sigma^{-1} : \mathcal{P}(K_\sigma^2) \to \mathcal{P}(K_\sigma)$*
- *komplementering*

Da har T_σ (og dermed SAND) ikke navn i σ.

Bevis Hvis T_σ har navn i σ og σ er lukket komplementering har $\complement T_\sigma = K_\sigma - T_\sigma$ ligeledes navn i σ. Under de to resterende lukkethedsegenskaber får vi så at følgende mængde har navn i σ

$$\begin{aligned} d_\sigma^{-1}\left(o_\sigma^{-1}(\complement T_\sigma)\right) &= \left\{x \in Pr_\sigma^{(1)} \mid O_\sigma(x,x) \in \complement T_\sigma\right\} \\ &= \left\{x \in Pr_\sigma^{(1)} \mid x \notin E_\sigma(x)\right\} \\ &= E(HET(\sigma)) \end{aligned}$$

i modstrid med beviset for Teorem 32. $\square$

Sproget *FA* har ikke navn for hverken *SAND* eller *FALSK* af den simple årsag at $S_{FA} \cup \mathrm{Pr}_{FA} \nsubseteq K_{FA}$. Vi kunne måske forestille os at udvide mængden af konstantnavne i *FA*, så vi opnåede et sprog σ med $S_\sigma \cup Pr_\sigma \subseteq K_\sigma$. Hvis man forsøger dette viser det sig dog at man støder på hvad der forekommer at være uoverstigelige hindringer. Da vi så på simple normalsprog formaliserende meget beskedne dele af det naturlige sprog, var det ikke et stort problem at opnå $S_\sigma \cup Pr_\sigma \subseteq K_\sigma$, men den generalitet vi ønsker at have i et aritmetisk sprog synes på ingen måde at kunne kombineres med en opnåelse af $S_\sigma \cup Pr_\sigma \subseteq K_\sigma$ (dette er egen bitre erfaring efter utallige forsøg).

Selvom Teorem 42 og Teorem 43 ikke kan anvendes på *FA* fordi $S_{FA} \cup Pr_{FA} \nsubseteq K_{FA}$, kan vi opnå tilsvarende resultater gældende for sprog som *FA* ved at anvende **Gödel-kodninger**.

Definition 44. *Lad σ være et formelt sprog og lad Σ være en endelig følge. En injektiv afbildning $g : \Sigma^* \to K_\sigma$ kaldes en* ***Gödel-kodning i*** *σ. Hvis*

$\alpha \in \Sigma^*$ *kaldes* $g(\alpha)$ *for* ***Gödel-nummeret*** *af* α *(mht.* g*).*[11]

Vi vil primært benytte Gödel-kodninger $g : \Sigma^* \to K_\sigma$ hvor $\Sigma \supseteq \Sigma_\sigma$. Dermed bliver Gödel-kodningen en afbildning som "koder" ethvert element a i Σ_σ^* som et entydigt element $g(a)$ i K_σ. I stedet for at at spørge om T_σ har navn i sproget σ kan vi da spørge om $g(T_\sigma)$ har navn i σ for en passende Gödel-kodning g. Vi har så følgende resultat i stil med Teorem 43.

Teorem 45 (Tarski Teorem). *Lad* σ *være et formelt sprog og lad* $g : \Sigma^* \to K_\sigma$ *være en Gödel-kodning i* σ *med* $\Sigma \supseteq \Sigma_\sigma$*. Vi definerer afbildningen* $o_{\sigma,g} : g(Pr_\sigma^{(1)}) \times K_\sigma \to g(S_\sigma)$ *ved*

$$o_{\sigma,g}(k_1, k_2) = g\left(O_\sigma(g^{-1}(k_1), k_2)\right).$$

Hvis σ *er lukket under*

- *afbildningen* $o_{\sigma,g}^{-1} : \mathcal{P}(g(S_\sigma)) \to \mathcal{P}(g(Pr_\sigma^{(1)}) \times K_\sigma)$
- *afbildningen* $d_\sigma^{-1} : \mathcal{P}(K_\sigma^2) \to \mathcal{P}(K_\sigma)$
- *komplementering*

da har $g(T_\sigma)$ *ikke navn i* σ*.*

Bevis Beviset følger beviset for Teorem 43. Antag $g(T_\sigma)$ har navn i σ. Da har følgende mængde navn i σ

$$\begin{aligned}
d_\sigma^{-1}\left(o_{\sigma,g}^{-1}\left(\complement g(T_\sigma)\right)\right) &= \left\{k \in g(Pr_\sigma^{(1)}) \mid o_{\sigma,g}(k,k) \in \complement g(T_\sigma)\right\} \\
&= \left\{k \in g(Pr_\sigma^{(1)}) \mid g(O_\sigma(g^{-1}(k),k)) \notin g(T_\sigma)\right\} \\
&= \left\{k \in g(Pr_\sigma^{(1)}) \mid O_\sigma(g^{-1}(k),k) \notin T_\sigma\right\} \\
&= \left\{k \in g(Pr_\sigma^{(1)}) \mid k \notin E_\sigma(g^{-1}(k))\right\} \\
&= \overline{\Delta}_I
\end{aligned}$$

hvor $I = E_\sigma \circ g^{-1} \restriction g(Pr_\sigma^{(1)})$. Da $\operatorname{ran}(I) = E_\sigma(Pr_\sigma^{(1)})$ har $\overline{\Delta}_I$ ifølge det specialiserede diagonalargument, Lemma 21, ikke navn i σ, modstrid. □

Vi vil nu vise at der eksisterer en simpel Gödel-kodning g i FA så ovenstående teorem kan anvendes på FA med denne Gödel-kodning, dvs. så $g(T_{FA})$ ikke har navn i FA.

Definition 46. *For enhver endelig følge* $\Sigma = (s_1, \dots, s_m)$ *definerer vi en injektiv afbildning* $h_\Sigma : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ *ved*

[11] Betegnelsen Gödel-*nummer* kommer af at Gödel indførte Gödel-kodninger i forbindelse med formelle sprog for aritmetik, hvori konstantnavnene er repræsentationer af naturlige tal, dvs. $g(\alpha)$ bliver (repræsentationen af) et tal—et *nummer* for α.

(i) $h_\Sigma(\ () \ ) = 0$

(ii) $h_\Sigma(s_{i_1} \dots s_{i_n}) = (m+1)^{n-1} i_1 + (m+1)^{n-2} i_2 + \dots + (m+1) i_{n-1} + i_n$.

$h_\Sigma(s_{i_1} \dots s_{i_n})$ er således tallet som i base $(m+1)$ notation består af cifrene $i_1, \dots, i_n$. Vi lader $i : \mathbb{N} \to K_{FA}$ være den injektive afbildning

$$i(n) = \overline{n}$$

og lader $g_\Sigma : \Sigma^* \to K_{FA}$ være sammensætningen $i \circ h_\Sigma$.

Vi har således for enhver endelig følge Σ fået defineret en simpel Gödel-kodning g_Σ i *FA* med definitionsmængde Σ^*.

Lemma 47. *For enhver endelig følge Σ har* $\text{ran}(g_\Sigma)$ *navn i FA.*

Bevis Lad m betegne antallet af elementer i Σ. Ethvert naturligt tal $n_1 \in \mathbb{N}$ har en entydig fremstilling i base $(m+1)$ notation. $ran(h_\Sigma) - \{0\}$ er mængden af naturlige tal $n_1 \in \mathbb{N}$ som i base $(m+1)$ notation består af cifre som alle er forskellige fra 0. Der gælder derfor $n_1 \in \mathbb{N} - (\text{ran}(h_\Sigma) - \{0\})$ hvis og kun hvis n_1 i base $(m+1)$ notation indeholder cifret 0. Antag n_1 er et tal som i base $(m+1)$ notation har 0 som sit n_2-mindst betydende ciffer. Lad n_3 være tallet som opstår fra n_1 ved yderligere at sætte de $(n_2 - 1)$-mindst betydende cifre i n_1's base $(m+1)$ notation lig 0. Der gælder da

- $n_1 \geq n_3$
- $n_1 - n_3 < (m+1)^{n_2 - 1}$
- $(m+1)^{n_2} \mid n_3 \quad$ ($(m+1)^{n_2}$ *går op i* n_3).

Vi har altså at hvis n_1 er et tal som i base $(m+1)$ notation har 0 som sit n_2-mindst betydende ciffer da gælder

$$\text{der eksisterer } n_3 \in \mathbb{N} \text{ så } n_1 \geq n_3 \text{ ,} \\ n_1 - n_3 < (m+1)^{n_2-1} \text{ og } (m+1)^{n_2} \mid n_3. \quad (15)$$

Det ses også at gælde, at hvis (15) er opfyldt, da må n_1 være et tal som i base $(m+1)$ notation har 0 som sit n_2-mindst betydende ciffer. Derfor gælder at n_1 er et tal som i base $(m+1)$ notation indeholder cifret 0 hvis og kun hvis

$$\text{der eksisterer } n_2, n_3 \in \mathbb{N} \text{ så } n_1 \geq n_3 \text{ ,} \\ n_1 - n_3 < (m+1)^{n_2} \text{ og } (m+1)^{n_2+1} \mid n_3.$$

Vi har således

$$\begin{aligned}
&n_1 \in \mathbb{N} - (\mathrm{ran}(h_\Sigma) - \{0\}) \\
\Leftrightarrow\ & n_1 \text{ indeholder cifret 0 i base } (m+1) \text{ notation} \\
\Leftrightarrow\ & \exists x_2 \exists x_3 \Big[\big[\overline{L}(x_3, \overline{n}_1) \vee x_3 = \overline{n}_1\big] \wedge \overline{L}\left(\overline{n}_1, \overline{m+1}^{\wedge} x_2 + x_3\right) \wedge \\
& \qquad \exists x_4 \left[\overline{m+1}^{\wedge}\ [x_2 + 1] \cdot x_4 = x_3\right] \Big] \in T_{FA}
\end{aligned}$$

og hermed

$$\begin{aligned}
&\overline{n}_1 \in \mathrm{ran}(g_\Sigma) \\
\Leftrightarrow\ & \overline{n}_1 = 0 \vee \neg \exists x_2 \exists x_3 \Big[\big[\overline{L}(x_3, \overline{n}_1) \vee x_3 = \overline{n}_1\big] \wedge \overline{L}\left(\overline{n}_1, \overline{m+1}^{\wedge} x_2 + x_3\right) \wedge \\
& \qquad \exists x_4 \left[\overline{m+1}^{\wedge}\ [x_2 + 1] \cdot x_4 = x_3\right] \Big] \in T_{FA} \\
\Leftrightarrow\ & \overline{n}_1 \in E_{FA}\Big(x_1 = 0 \vee \neg \exists x_2 \exists x_3 \Big[\big[\overline{L}(x_3, x_1) \vee x_3 = x_1\big] \wedge \\
& \qquad \overline{L}\left(x_1, \overline{m+1}^{\wedge} x_2 + x_3\right) \wedge \exists x_4 \left[\overline{m+1}^{\wedge}\ [x_2 + 1] \cdot x_4 = x_3\right] \Big] \Big)
\end{aligned}$$

som viser det ønskede. □

Vi vil indføre lidt notation som skal gøre det enklere at læse de prædikatnavne i *FA* som vi i det følgende vil konstruere. Når vi i et prædikatnavn ønsker at lade Gödel-nummeret af en streng α indgå vil vi skrive $\underline{\alpha}$ istedet for $g(\alpha)$, når det af sammenhængen er oplagt hvilken Gödel-kodning g vi benytter. Hvis en relation R er vist at have navn i *FA* vil vi benytte $\overline{R}$ som en betegnelse for dette navn. Det vil sige vi f.eks. benytter $\overline{L}$ som navn for relationen L fra Eksempel 16, altså lader

$$\overline{L}(x_1, x_2) \ = \ \exists x_3 [x_2 = x_1 + x_3 + \overline{1}].$$

Lad R være en $(n+1)$-plads afbildning som er vist at have navn i *FA*, og lad $p(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) \in Pr^m_{FA}$ og $t_1, \ldots, t_n \in At_{FA}$. Vi vil anvende

$$p(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{j-1}}, \overline{R}(t_1, \ldots, t_n), x_{i_{j+1}}, \ldots, x_{i_m})$$

som en forkortelse for

$$\exists x_k \left[p(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{j-1}}, x_k, x_{i_{j+1}}, \ldots, x_{i_m}) \wedge \overline{R}(t_1, \ldots, t_n, x_k) \right]$$

hvor x_k er en variabel som ikke forekommer i hverken p, $\overline{R}$ eller $t_1, \ldots, t_n$.

Lemma 48. *Lad Σ være en endelig følge. For alle $a, b \in \Sigma^*$ gælder*

$$h_\Sigma(ab) = (m+1)^{|b|} h_\Sigma(a) + h_\Sigma(b)$$

hvor $|b|$ er længden af b, dvs. antallet af elementer i følgen b.

Bevis Antag $\Sigma = (s_1, \ldots, s_m)$. Lad $a = s_{i_1} \ldots s_{i_p}$ og $b = s_{j_1} \ldots s_{j_q}$. Da fås

$$\begin{aligned} h_\Sigma(ab) &= h_\Sigma(s_{i_1} \ldots s_{i_p} s_{j_1} \ldots s_{j_q}) \\ &= (m+1)^{p+q-1} i_1 + \cdots + (m+1)^q i_p + (m+1)^{q-1} j_1 + \cdots + j_q \\ &= (m+1)^q \left((m+1)^{p-1} i_1 + \cdots + i_p\right) + (m+1)^{q-1} j_1 + \cdots + j_q \\ &= (m+1)^{|b|} h_\Sigma(a) + h_\Sigma(b) \end{aligned}$$

som viser det ønskede. □

Definition 49. *Lad σ være et formelt sprog og lad g være en Gödel-kodning i σ. For alle $l > 1$ defineres **l-konkateneringsafbildningen** $c_g^l : \mathrm{ran}(g)^l \to \mathrm{ran}(g)$ ved*

$$c_g^l(k_1, \ldots, k_l) = g\left(g^{-1}(k_1) g^{-1}(k_2) \ldots g^{-1}(k_l)\right).$$

Lemma 50. *For enhver endelig følge Σ har l-konkateneringsafbildningerne $c_{g_\Sigma}^l$ navn i FA.*

Bevis Beviset føres i 3 skridt. Antag $\Sigma = (s_1, \ldots, s_m)$.

Påstand 1. *Funktionen $p : \mathrm{ran}(g_\Sigma) \to K_{FA}$ givet ved*

$$p(\overline{n}) = \left|g_\Sigma^{-1}(\overline{n})\right| = \left|h_\Sigma^{-1}(n)\right|$$

har navn i FA.

Bevis Hvis $a \in \Sigma^*$ med $|a| = n$ kan a skrives på formen $a = s_{i_1} \ldots s_{i_n}$. Definitionen af h_Σ giver os

$$h_\Sigma(a) = h_\Sigma(s_{i_1} \ldots s_{i_n}) = (m+1)^{n-1} i_1 + (m+1)^{n-2} i_2 + \cdots + i_n$$

dvs. $(m+1)^{n-1} < h_\Sigma(a) < (m+1)^n$. Dette viser at der for alle $a \in \Sigma^*$ gælder

$$(m+1)^{|a|-1} < h_\Sigma(a) < (m+1)^{|a|}.$$

Med andre ord,

$$|a| = \min\left\{n \in \mathbb{N} \mid h_\Sigma(a) < (m+1)^n\right\}.$$

Heraf fås

$$
\begin{aligned}
& (\overline{n}_1,\overline{n}_2) \in p \\
\Leftrightarrow\ & \overline{n}_1 \in \mathrm{ran}(g_\Sigma) \text{ og } n_2 = \left|h_\Sigma^{-1}(n_1)\right| \\
\Leftrightarrow\ & \overline{n}_1 \in \mathrm{ran}(g_\Sigma) \text{ og } n_2 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n_1 < (m+1)^n\} \\
\Leftrightarrow\ & \overline{n}_1 \in \mathrm{ran}(g_\Sigma)\ ,\ n_1 < (m+1)^{n_2} \text{ og for alle } n_3 \in \mathbb{N} \text{ med} \\
& \qquad n_1 < (m+1)^{n_3} \text{ gælder } n_3 \geq n_2 \\
\Leftrightarrow\ & \overline{\mathrm{ran}(g_\Sigma)}(\overline{n}_1) \wedge \overline{L}(\overline{n}_1, \overline{m+1}\,{}^\wedge\, \overline{n}_2) \wedge \\
& \qquad \forall x_3 \left[\overline{L}(\overline{n}_1, \overline{m+1}\,{}^\wedge\, x_3) \to \overline{L}(\overline{n}_2, x_3) \vee \overline{n}_2 = x_3\right] \in T_{FA} \\
\Leftrightarrow\ & (\overline{n}_1,\overline{n}_2) \in E_{FA}\Big(\overline{\mathrm{ran}(g_\Sigma)}(x_1) \wedge (\overline{L}(x_1, \overline{m+1}\,{}^\wedge\, x_2) \wedge \\
& \qquad \forall x_3 \left[\overline{L}(x_1, \overline{m+1}\,{}^\wedge\, x_3) \to \overline{L}(x_2, x_3) \vee x_2 = x_3\right]\Big)
\end{aligned}
$$

dvs. prædikatnavnet

$$
\begin{aligned}
& \overline{\mathrm{ran}(g_\Sigma)}(x_1) \wedge \overline{L}(x_1, \overline{m+1}\,{}^\wedge\, x_2) \wedge \\
& \qquad\qquad \forall x_3 \left[\overline{L}(x_1, \overline{m+1}\,{}^\wedge\, x_3) \to \overline{L}(x_2, x_3) \vee x_2 = x_3\right]
\end{aligned}
$$

er navn for p. □

Påstand 2. *2-konkateneringsafbildningen $c^2_{g_\Sigma}$ har navn i FA.*

Bevis Der gælder

$$
\begin{aligned}
& (\overline{n}_1,\overline{n}_2,\overline{n}_3) \in c^2_{g_\Sigma} \\
\Leftrightarrow\ & \overline{n}_1,\overline{n}_2 \in \mathrm{ran}(g_\Sigma) \text{ og } \overline{n}_3 = g_\Sigma\left(g_\Sigma^{-1}(\overline{n}_1) g_\Sigma^{-1}(\overline{n}_2)\right) \\
\Leftrightarrow\ & \overline{n}_1,\overline{n}_2 \in \mathrm{ran}(g_\Sigma) \text{ og } n_3 = h_\Sigma(h_\Sigma^{-1}(n_1) h_\Sigma^{-1}(n_2)) \\
\Leftrightarrow\ & \overline{n}_1,\overline{n}_2 \in \mathrm{ran}(g_\Sigma) \text{ og } n_3 = (m+1)^{\left|h_\Sigma^{-1}(n_2)\right|} n_1 + n_2 \quad \text{(ifølge Lemma 48)} \\
\Leftrightarrow\ & \left[\overline{\mathrm{ran}(g_\Sigma)}(\overline{n}_1) \wedge \overline{\mathrm{ran}(g_\Sigma)}(\overline{n}_2) \wedge \overline{n}_3 = \overline{m+1}\,{}^\wedge\, \overline{p}(\overline{n}_2) \cdot \overline{n}_1 + \overline{n}_2\right] \in T_{FA} \\
\Leftrightarrow\ & (\overline{n}_1,\overline{n}_2,\overline{n}_3) \in E_{FA}\Bigg(\overline{\mathrm{ran}(g_\Sigma)}(x_1) \wedge \overline{\mathrm{ran}(g_\Sigma)}(x_2) \wedge \\
& \qquad x_3 = \overline{m+1}\,{}^\wedge\, \overline{p}(x_2) \cdot x_1 + x_2\Bigg)
\end{aligned}
$$

som beviser at $c^2_{g_\Sigma}$ har navn i *FA*. □

Vi kan nu ved induktion over l bevise at $c^l_{g_\Sigma}$ for alle $l > 1$ har navn i *FA*. Basistilfældet $l = 2$ har vi netop behandlet. Antag $c^l_{g_\Sigma}$ har navn i *FA*.

Da gælder

$$
\begin{aligned}
&(\overline{n}_1, \dots, \overline{n}_{l+2}) \in c_{g_\Sigma}^{l+1} \\
\Leftrightarrow\ & \overline{n}_{l+2} = c_{g_\Sigma}^{l+1}(\overline{n}_1, \dots, \overline{n}_{l+1}) \\
\Leftrightarrow\ & \overline{n}_{l+2} = c_{g_\Sigma}^{2}(c_{g_\Sigma}^{l}(\overline{n}_1, \dots, \overline{n}_l), \overline{n}_{l+1}) \\
\Leftrightarrow\ & \Big[\overline{n}_{l+2} = \overline{c_{g_\Sigma}^{2}}(\overline{c_{g_\Sigma}^{l}}(\overline{n}_1, \dots, \overline{n}_l), \overline{n}_{l+1})\Big] \in T_{FA} \\
\Leftrightarrow\ & (\overline{n}_1, \dots, \overline{n}_{l+2}) \in E_{FA}\Big(x_{l+2} = \overline{c_{g_\Sigma}^{2}}(\overline{c_{g_\Sigma}^{l}}(x_1, \dots, x_l), x_{l+1})\Big)
\end{aligned}
$$

som viser det ønskede. □

Vi vil i det følgende skrive

$$t_1 * t_2 * \cdots * t_l$$

istedet for

$$\overline{c_g^l}(t_1, \dots, t_l)$$

når det af sammenhængen er klart hvilken Gödel-kodning g vi benytter.

Definition 51. *Lad Σ være en endelig følge (et alfabet) og lad $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.*

- *α kaldes et **præfiks** af β hvis der eksisterer $\gamma \in \Sigma^*$ så $\beta = \alpha\gamma$.*
- *α kaldes et **suffiks** af β hvis der eksisterer $\gamma \in \Sigma^*$ så $\beta = \gamma\alpha$.*
- *α kaldes en **delstreng** af β hvis der eksisterer $\gamma, \delta \in \Sigma^*$ så $\beta = \gamma\alpha\delta$.*

Lemma 52. *Lad $\Sigma \supseteq \Sigma_{FA}$ være en endelig følge. Følgende mængder har alle navn i FA*

(i) $P = \big\{(k_1, k_2) \in \operatorname{ran}(g_\Sigma) \mid g_\Sigma^{-1}(k_1) \text{ er et præfiks af } g_\Sigma^{-1}(k_2)\big\}$

(ii) $S = \big\{(k_1, k_2) \in \operatorname{ran}(g_\Sigma) \mid g_\Sigma^{-1}(k_1) \text{ er et suffiks af } g_\Sigma^{-1}(k_2)\big\}$

(iii) $D = \big\{(k_1, k_2) \in \operatorname{ran}(g_\Sigma) \mid g_\Sigma^{-1}(k_1) \text{ er en delstreng af } g_\Sigma^{-1}(k_2)\big\}$

Bevis

(i) For alle $k_1, k_2 \in K_{FA}$ gælder

$$
\begin{aligned}
&(k_1, k_2) \in P \\
\Leftrightarrow\ & k_1, k_2 \in \operatorname{ran}(g_\Sigma) \text{ og der eksisterer } \gamma \in \Sigma^* \text{ så } g_\Sigma^{-1}(k_2) = g_\Sigma^{-1}(k_1)\gamma \\
\Leftrightarrow\ & k_1 \in \operatorname{ran}(g_\Sigma) \text{ og der eksisterer } k_3 \in \operatorname{ran}(g_\Sigma) \text{ så } k_2 = g_\Sigma\big(g_\Sigma^{-1}(k_1) g_\Sigma^{-1}(k_3)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x_3[k_2 = k_1 * x_3] \in T_{FA} \\
\Leftrightarrow\ & (k_1, k_2) \in E_{FA}\,(\exists x_3[x_2 = x_1 * x_3])
\end{aligned}
$$

som viser at

$$\overline{P}(x_1, x_2) = \exists x_3[x_2 = x_1 * x_3]$$

er navn for P i *FA*.

(ii) Symmetrisk med ovenfor fås at

$$\overline{S}(x_1, x_2) = \exists x_3[x_2 = x_3 * x_1]$$

er navn for S i *FA*.

(iii) Udfra de to ovenstående tilfælde er det nu let at se at

$$\overline{D}(x_1, x_2) = \exists x_3 \exists x_4[x_2 = x_3 * x_1 * x_4]$$

må være navn for D i *FA*.

Hermed er beviset fuldført. □

Lemma 53. *Lad* Σ *være en endelig følge indeholdende symbolet* 0. *Funktionen* $g_\Sigma \upharpoonright K_{FA}$ *har navn i FA.*

Bevis Lad $\overline{n}_1 \in K_{FA}$. Der gælder

$$\begin{aligned}
h_\Sigma(\overline{n}_1) &= h_\Sigma(\overbrace{00\ldots0}^{n_1}) \\
&= (m+1)^{n_1-1}h_\Sigma(0) + \cdots + (m+1)^2 h_\Sigma(0) + (m+1)h_\Sigma(0) + h_\Sigma(0) \\
&= h_\Sigma(0)\left((m+1)^{n_1-1} + \cdots + (m+1)^2 + (m+1) + 1\right) \\
&= h_\Sigma(0)f(n_1)
\end{aligned}$$

hvor $f(n_1) = (m+1)^{n_1-1} + \cdots + (m+1)^2 + (m+1) + 1$. For alle $n_1 \in \mathbb{N}$ gælder

$$\begin{aligned}
mf(n_1) + 1 &= m\left((m+1)^{n_1-1} + \cdots + (m+1)^2 + (m+1) + 1\right) + 1 \\
&= m(m+1)^{n_1-1} + \cdots + m(m+1)^2 + m(m+1) + m + 1 \\
&= m(m+1)^{n_1-1} + \cdots + m(m+1)^2 + (m+1)^2 \\
&= m(m+1)^{n_1-1} + \cdots + (m+1)^3 \\
&= \;\cdots\; = (m+1)^{n_1}.
\end{aligned}$$

Der gælder derfor

$$\begin{aligned}
&(\overline{n}_1, \overline{n}_2) \in g_\Sigma \upharpoonright K_{FA} \\
\Leftrightarrow\ &\overline{n}_2 = g_\Sigma(\overline{n}_1) \\
\Leftrightarrow\ &n_2 = h_\Sigma(\overline{n}_1) \\
\Leftrightarrow\ &n_2 = h_\Sigma(0)f(n_1) \\
\Leftrightarrow\ &m\,n_2 + h_\Sigma(0) = m\,h_\Sigma(0)f(n_1) + h_\Sigma(0) \\
\Leftrightarrow\ &m\,n_2 + h_\Sigma(0) = h_\Sigma(0)(mf(n_1) + 1) \\
\Leftrightarrow\ &m\,n_2 + h_\Sigma(0) = h_\Sigma(0)(m+1)^{n_1} \\
\Leftrightarrow\ &\left[\overline{m} \cdot \overline{n}_2 + g_\Sigma(0) = g_\Sigma(0) \cdot \overline{m+1}\,^\wedge\, \overline{n}_1\right] \in T_{FA} \\
\Leftrightarrow\ &(\overline{n}_1, \overline{n}_2) \in E_{FA}\left(\overline{m} \cdot x_2 + g_\Sigma(0) = g_\Sigma(0) \cdot \overline{m+1}\,^\wedge\, x_1\right)
\end{aligned}$$

hvilket viser at $g_\Sigma \restriction K_{FA}$ har navn i FA, som ønsket. $\square$

Som navn for $g_\Sigma \restriction K_{FA}$ i FA vil vi benytte $\overline{g_\Sigma}$ istedet for $\overline{g_\Sigma \restriction K_{FA}}$. Vi kan nu benytte Teorem 45 på FA.

Teorem 54. *Lad $\Sigma \supseteq \Sigma_{FA}$ være en endelig følge. $g_\Sigma(T_{FA})$ har ikke navn i FA.*

Bevis For at spare lidt på notationen lader vi $g = g_\Sigma$. Ifølge Teorem 45 er det tilstrækkeligt at vise at FA er lukket under

(i) afbildningen $o_{FA,g}^{-1}$

(ii) afbildningen d_{FA}^{-1}

(iii) komplementering

(iii) er triviel: hvis $\overline{M}$ er navn for $M \subseteq K_{FA}^n$ i FA, da er $\neg\overline{M}$ navn for $\complement M$ i FA.

(ii): Antag $M \in \mathcal{P}(K_{FA}^2)$ har navn i FA. Da gælder

$$\begin{aligned} d_{FA}^{-1}(M) &= \{k \in K_{FA} \mid (k,k) \in M\} \\ &= \left\{k \in K_{FA} \mid \overline{M}(k,k) \in T_{FA}\right\} \\ &= E_{FA}(\overline{M}(x_1,x_1)) \end{aligned}$$

dvs. $d_{FA}^{-1}(M)$ har navn $\overline{M}(x_1,x_1)$ i FA.

(i): Det kræver en del arbejde at vise at FA er lukket under $o_{FA,g}^{-1}$. Men heldigvis kan vi klare os med lidt mindre. Lad

$$\begin{aligned} Pr'_{FA} = \big\{p \in Pr_{FA}^{(1)} \mid p \text{ indeholder } x_1 \text{ som (eneste) fri variabel,} \\ \text{og alle forekomster af } x_1 \text{ i } p \text{ er frie}\big\} \end{aligned}$$

og lad $o'_{FA,g}$ være afbildningen $o_{FA,g} \restriction g(Pr'_{FA}) \times K_{FA}$. Idet $E_{FA}(Pr_{FA}^{(1)}) = E_{FA}(Pr'_{FA})$ (da valgene af frie og bundne variable er underordnet for hvilke mængder vi kan have navn for) ses det at beviset for Teorem 45 stadig holder hvis vi overalt erstatter $o_{FA,g}$ med $o'_{FA,g}$ og $Pr_{FA}^{(1)}$ med Pr'_{FA}. Lad nu $o''_{FA,g} : g(Pr'_{FA}) \times K_{FA} \to g(S_{FA})$ være givet ved

$$o''_{FA,g}(k_1,k_2) = g\left(\exists x_1[x_1 = k_2 \wedge g^{-1}(k_1)]\right).$$

Vi vil vise

$$o''_{FA,g}(k_1,k_2) \in g(T_{FA}) \Leftrightarrow o'_{FA,g}(k_1,k_2) \in g(T_{FA})$$

hvoraf det ses at følge at vi kan erstatte $o'_{FA,g}$ med $o''_{FA,g}$ i beviset for Teorem 45. Ækvivalensen vises på følgende måde. Lad $(k_1,k_2) \in g(Pr'_{FA}) \times K_{FA}$.

Da gælder $g^{-1}(k_1) \in Pr'_{FA}$, dvs. $g^{-1}(k_1) = g^{-1}(k_1)(x_1)$. Vi får

$$\begin{aligned}
&o''_{FA,g}(k_1, k_2) \in g(T_{FA}) \\
\Leftrightarrow\ & g(\exists x_1[x_1 = k_2 \wedge g^{-1}(k_1)(x_1)]) \in g(T_{FA}) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x_1[x_1 = k_2 \wedge g^{-1}(k_1)(x_1)] \in T_{FA} \\
\Leftrightarrow\ & k = k_2 \in T_{FA} \text{ og } g^{-1}(k_1)(k) \in T_{FA} \text{ for en } k \in K_{FA} \\
\Leftrightarrow\ & g^{-1}(k_1)(k_2) \in T_{FA} \\
\Leftrightarrow\ & O_{FA}(g^{-1}(k_1), k_2) \in T_{FA} \\
\Leftrightarrow\ & o'_{FA,g}(k_1, k_2) \in g(T_{FA})
\end{aligned}$$

hvorved ækvivalensen er vist. Vi mangler nu blot at vise at FA er lukket under afbildningen

$$o''_{FA,g}{}^{-1} : \mathcal{P}(g(S_{FA})) \to \mathcal{P}(g(Pr'_{FA}) \times K_{FA}).$$

For at vise dette har vi brug for at benytte at konkateringsafbildningerne og afbildningen $g \restriction K_{FA}$ har navn i FA (Lemma 50 og Lemma 53). Antag at $M \in \mathcal{P}(g(S_{FA}))$ har navn i FA. Vi skal vise at da har $o''_{FA,g}{}^{-1}(M)$ ligeledes navn i FA. Lad $(k_1, k_2) \in K^2_{FA}$. Da gælder

$$\begin{aligned}
&(k_1, k_2) \in o''_{FA,g}{}^{-1}(M) \\
\Leftrightarrow\ & (k_1, k_2) \in g(Pr'_{FA}) \times K_{FA} \text{ og } o''_{FA,g}(k_1, k_2) \in M \\
\Leftrightarrow\ & k_1 \in g(Pr'_{FA}) \text{ og } g\left(\exists x_1[x_1 = k_2 \wedge g^{-1}(k_1)]\right) \in M \\
\Leftrightarrow\ & k_1 \in g(Pr'_{FA}) \text{ og } \overline{M}\left(g(\exists x_1[x_1 = k_2 \wedge g^{-1}(k_1)])\right) \in T_{FA} \\
\Leftrightarrow\ & k_1 \in g(Pr'_{FA}) \text{ og } \overline{M}(\underline{\exists x_1[x_1 =} * \overline{g}(k_2) * \underline{\wedge} * k_1 * \underline{]}) \in T_{FA} \\
\Leftrightarrow\ & \overline{D}(\underline{x_1}, k_1) \in T_{FA} \text{ og } \neg\overline{D}(\underline{\exists x_1}, k_1) \in T_{FA} \text{ og} \\
& \qquad\qquad \overline{M}(\underline{\exists x_1[x_1 =} * \overline{g}(k_2) * \underline{\wedge} * k_1 * \underline{]}) \in T_{FA} \\
\Leftrightarrow\ & (k_1, k_2) \in E_{FA}\left(\overline{D}(\underline{x_1}, x_1) \wedge \neg\overline{D}(\underline{\exists x_1}, x_1) \wedge\right. \\
& \qquad\qquad \left.\overline{M}(\underline{\exists x_1[x_1 =} * \overline{g}(x_2) * \underline{\wedge} * x_1 * \underline{]})\right)
\end{aligned}$$

hvor næstsidste ækvivalens ovenfor følger af at $M \subseteq g(S_{FA})$. Ækvivalensen viser at $o''_{FA,g}{}^{-1}(M)$ har navn i FA. $\square$

Bemærkninger og referencer De centrale idéer i dette afsnit er lånt fra Smullyan ([Smu92]), men alt er her gennemført et par skridt mere generelt, hvilket har krævet en del nye idéer og en del mere teknik, som altsammen er mit eget.

7 Formelle Systemer

7.1 Introduktion

I det foregående har vi både set eksempler på formelle sprog som har formaliseret en del af naturlige sprog og formelle sprog som har formaliseret en del af matematikken. I det følgende skal vi koncentrere os om formelle sprog af den sidstnævnte type. Indenfor matematik og matematiske sprog er begrebet bevis et af de mest centrale. Beviser er argumenter som skal etablere sandheden af bestemte sætninger i de pågældende matematiske sprog. Et bevis er således en række af sætninger, som tilsammen klart og med nødvendighed udelukker at den pågældende sætning kan være andet end sand. Det er langt fra oplagt hvad det vil sige at noget er "klart" og hvornår noget er påvist "med nødvendighed", og i sædvanlig matematisk praksis er begrebet bevis da også et udefineret begreb. Forståelsen af hvad der i sædvanlig matematisk praksis konstituerer et bevis, og hvad der ikke gør det, bygger på konsensus—en konsensus der igennem historien har vist sig at være usædvanlig stærk indenfor netop matematik og matematisk bevisførelse. Trods denne stærke konsensus er der næppe nogen måde hvorpå vi kan præcisere et kriterium for hvornår noget udgør et bevis i sædvanlig forstand. I praksis finder vi et bevis tilstrækkeligt hvis vi ved at læse beviset føler os "overbeviste" om at det givne argument har det ønskede som nødvendig konsekvens. Sålænge begrebet bevis ikke er nærmere præciseret, har det heller ikke nogen præcis mening at tale om hvorvidt en bestemt sætning kan bevises (er bevisbar) eller ej. Ønsker vi at reflektere over sætningers bevisbarhed på en fornuftig og præcis måde, er vi tvunget til at forsøge at give en matematisk præcisering af begrebet bevis. En sådan præcisering vil nødvendigvis give et begreb som er mindre "fuzzy" end det intuitive bevisbegreb, og kan derfor aldrig være helt identisk med intuitive begreb.

Målet med de følgende afsnit er at få bevist følgende påstand

$$\text{Der eksisterer sande matematiske sætninger som ikke kan bevises.} \tag{16}$$

Det er klart at denne påstand må præciseres, før vi kan påvise dens rigtighed. Vi må altså præcisere begreberne "matematisk sætning", "sand matematisk sætning" og "bevis". Vi vil vente med at præcisere nøjagtig hvad vi lægger i begrebet matematisk sætning til senere, og i denne omgang blot nøjes med at fastlægge at en matematisk sætning er en sætning i et passende formelt sprog σ. Grundlæggende set er et bevis som nævnt en række af sætninger, et argument, som på en bestemt måde står i relation til den eller de sætninger i σ som beviset tænkes at bevise rigtigheden af. Selve argumentet kan ses som en symbolstreng over et passende alfabet Σ. Den eller de sætninger som argumentet etablerer sandheden af, er elementer i T_σ. At en symbolstreng $b \in \Sigma^*$ beviser en sætning $s \in T_\sigma$ kan udtrykkes ved at parret (b, s) tilhører en bestemt relation $B \subseteq \Sigma^* \times T_\sigma$, som vi kalder for

bevisrelationen. Bevisrelationen knytter sammenhæng imellem *beviser* og *det som bevises*. Vi præciserer

Definition 55. *Lad σ være et formelt sprog og lad Σ være en endelig følge (et alfabet). En relation B på $\Sigma^* \times T_\sigma$ kaldes en* ***bevisrelation*** *for σ. En streng $b \in \Sigma^*$ kaldes et* ***bevis*** *hvis $b \in \mathrm{dom}(B)$ og en sætning $s \in T_\sigma$ kaldes* ***bevisbar*** *hvis $s \in \mathrm{ran}(B)$. Hvis $(b, s) \in B$ siges b at være et* ***bevis for*** *s.*

Definition 56. *Et* ***formelt system*** *φ består af et formelt sprog $\sigma(\varphi)$ samt en bevisrelation $B(\varphi)$ for $\sigma(\varphi)$. Vi siger at φ er det formelle sprog $\sigma(\varphi)$ udstyret med bevisrelation $B(\varphi)$. De sande sætninger i φ er elementerne i mængden $T_{\sigma(\varphi)}$ og de bevisbare sætninger i φ er elementerne i mængden $\mathrm{ran}(B(\varphi))$.*

Vi skal prøve at finde ud af hvilke egenskaber en bevisrelation B skal have for at den kan siges at præcisere nogle af de ting vi sædvanligvis lægger i begrebet bevis. Først må man lægge mærke til at der ikke fås meget ud af ikke at stille flere krav til bevisrelationen end at det er en relation på $\Sigma^* \times T_\sigma$ for et passende alfabet Σ. For under disse forudsætninger kan vi blot lade $\Sigma = \emptyset$ og lade bevisrelationen B være

$$B = \Sigma^* \times T_\sigma = \{()\} \times T_\sigma$$

hvorved alle sande sætninger i σ bliver bevisbare, med den tomme streng $()$ som gyldigt bevis. Dette giver naturligvis ikke en fornuftig præcisering af hvad vi lægger i begrebet bevis, og i dette tilfælde vil påstanden (16) være trivielt falsk. Det er klart at der i et sundt bevisbegreb må være en vis sammenhæng imellem beviserne og det som bevises. Dette kan vi dog også opnå på en triviel måde ved at lade enhver sand sætning være et bevis for sig selv, dvs. lade $\Sigma = \Sigma_\sigma$ og

$$B = \{(b, s) \in \Sigma^* \times T_\sigma \mid b = s\}$$

og dette giver heller ikke en "realistisk" bevisrelation. I dette tilfælde er det let at afgøre om et bevis b er et bevis for en sætning s eller ej, da vi blot skal checke om $b = s$, men til gengæld kan vi kun afgøre om en streng $b \in \Sigma^*$ overhovedet er et bevis, hvis vi kan afgøre om $b \in T_\sigma$, og dette kræver egentlig i sig selv et bevis. Det er klart at vi ikke ønsker at et bevis skal behøve at bevises at være et bevis. Hvis vi antog at det for nogle beviser var nødvendigt at bevise at de var beviser, måtte disse "beviser for beviserne" vel skulle være en del af de oprindelige beviser selv? Vi ønsker at et bevis skal være noget endegyldigt og uomtvisteligt, og ikke noget som i sig selv kræver at blive bevist. Medmindre vi stiller dette krav, bliver et bevis aldrig mere end et partielt argument; noget som højst kan fungere som "overbevis". Dette kan måske accepteres i den matematiske praksis, men ønsker vi at studere bevisbegrebet som et matematisk objekt, kan vi tilsyneladende kun vælge imellem at lade et bevis være stort set hvad som helst, eller at kræve at bevis er noget endegyldigt som aldrig i sig selv kræver bevis. Men hvad vil det sige at det ikke kræver bevis at indse at et bevis er et bevis? Hvis vi skal kunne indse at $(b,s) \in B$, for en bevisrelation B, uden at dette kræver et bevis, må vi have en *systematisk, mekanisk* måde hvorpå vi kan checke om $(b,s) \in B$ eller ej. Det vi forventer af en realistisk bevisrelation er altså at det er en bevisrelation B, for hvilken der eksisterer en rent mekanisk måde hvorpå det for alle $(b,s) \in \Sigma^* \times \Sigma_\sigma^*$ kan afgøres om $(b,s) \in B$. Nu mangler vi så naturligvis at præcisere hvad vi mener med en "mekanisk" metode. Da Gödel, Alan M. Turing (1912-1954) og andre spekulerede over dette i begyndelsen af 1930'erne var det ikke så oplagt hvordan begrebet skulle præciseres, men i disse computerdage er det ikke længere så vanskeligt. At der eksisterer en rent mekanisk måde hvorpå vi kan afgøre medlemsskap i relationen B må være ækvivalent med at sige at der eksisterer et computerprogram som med $(b,s) \in \Sigma^* \times \Sigma_\sigma^*$ som input kan svare på om det er tilfældet at $(b,s) \in B$. For igennem computerprogrammer at få et stabilt begreb, må vi forestille os at vi opererer på en computer med ubegrænset datakraft. Computere kan programmeres i mange forskellige programmeringssprog, men disse sprog er alle dybest set ækvivalente, da de i sidste ende alle bliver reduceret til de samme fysiske operationer i maskinens hardware. Vi vil i det følgende afsnit definere et typisk imperativt programmeringssprog kaldet `while`, som vi derefter vil benytte som grundlaget for vores definition af mekanisk metode eller mekanisk afgørbarhed.

Bemærkninger og referencer Dette afsnit er hovedsageligt baseret på egne overvejelser, inspireret af diskussioner omkring beregnelighed og Gödels ufuldstændighedsteorem. Begrebet bevisrelation og det deraf fremkomne systembegreb er mit eget forsøg på at generalisere systembegrebet et skridt videre end det klassiske formelle system, hvor beviserbarhed er begrænset til at være bestemt af en række aksiomer og slutningsregler.

7.2 Definition af while-sprogene

I dette afsnit definerer vi programmeringssproget `while`. Ethvert program i `while` tager et antal strenge over et alfabet Σ som input og giver en streng over samme alfabet som output. Vi vil ikke låse os fast på noget bestemt alfabet Σ, hvorfor vi definerer et sprog $\texttt{while}(\Sigma)$ for enhver endelig, ikke-tom følge Σ.

Et program i et `while`-sprog kunne f.eks. se således ud:

$$\texttt{x}_1 := \texttt{last}(\texttt{x}_1); \texttt{x}_2 := \texttt{nlast}(\texttt{x}_2); \texttt{y} := \texttt{conc}(\texttt{x}_2, \texttt{x}_1);$$
$$\texttt{while}\ \texttt{x}_2\ \texttt{do}\ \texttt{y} := \texttt{conc}(\texttt{y}, \texttt{x}_1); \texttt{x}_2 := \texttt{nlast}(\texttt{x}_2)\ \texttt{end}$$

`while` er et imperativt sprog, dvs. programmerne i `while` kan ses som algoritmer—programmerne består af instruktioner (gør dit, gør dat), som enten kan udføres af en maskine eller et menneske. I det givne eksempel udføres algoritmen på følgende måde:

> Instruktionen $\texttt{x}_1 := \texttt{last}(\texttt{x}_1)$ beder os om at udtage det sidste symbol i den streng $\texttt{x}_1$ betegner og herefter lade $\texttt{x}_1$ betegne dette symbol.
>
> Instruktionen $\texttt{x}_2 := \texttt{nlast}(\texttt{x}_2)$ beder os om at danne strengen af alle pånær det sidste af symbolerne i den streng $\texttt{x}_2$ betegner, og herefter lade $\texttt{x}_2$ betegne den således dannede streng.
>
> Instruktionen $\texttt{y} := \texttt{conc}(\texttt{x}_2, \texttt{x}_1)$ beder os om at tage de to strenge a og b som henholdsvis $\texttt{x}_2$ og $\texttt{x}_1$ betegner, og konkatenere disse til strengen ab, som herefter skal være strengen $\texttt{y}$ betegner.
>
> Instruktionen
>
> $$\texttt{while}\ \texttt{x}_2\ \texttt{do}\ \texttt{y} := \texttt{conc}(\texttt{y}, \texttt{x}_1); \texttt{x}_2 := \texttt{last}(\texttt{x}_2)\ \texttt{end}$$
>
> beder os om at udføre instruktionerne
>
> $$\texttt{y} := \texttt{conc}(\texttt{y}, \texttt{x}_1); \texttt{x}_2 := \texttt{nlast}(\texttt{x}_2)$$
>
> gentagne gange indtil $\texttt{x}_2$ på et tidspunkt bliver tilknyttet værdien $()$, dvs. kommer til at betegne den tomme streng. Den tomme streng er vores modstykke til konstanten `false`, som sædvanligvis benyttes i denne type sprog. Det kan ske at $\texttt{x}_2$ aldrig bliver tilknyttet værdien $()$, og da vil programudførslen aldrig slutte. I dette tilfælde får vi således ikke noget output fra programudførslen. Hvis udførslen af instruktionerne på et tidspunkt terminerer, vil outputtet være den streng som $\texttt{y}$ betegner på terminerings-tidspunktet.

Gennemgangen af ovenstående program-eksempel illustrerer det meste af intuitionen bag programmeringssprogene $\mathtt{while}(\Sigma)$. Vi kan nu gå videre med den stringente matematiske definition af disse sprog. For enhver endelig, ikke-tom følge Σ definerer vi $\mathtt{while}(\Sigma)$ som et enkelttypet normalsprog, hvor programmerne er sprogets prædikatnavne.

Definition 57. *Lad Σ være en endelig, ikke-tom følge. Alfabetet og mængden af konstantnavne i $\mathtt{while}(\Sigma)$ defineres ved*

$$\Sigma_{\mathtt{while}(\Sigma)} = \Sigma \cup \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \ldots, \mathtt{z}\} \cup \{ (\ , \ ) \ , \ ; \ , \ ' \ , \ : \ , \ = \} \cup \{,\}.$$

$$K_{\mathtt{while}(\Sigma)} = \Sigma^*.$$

Før vi kan definere mængderne $Pr^{(n)}_{\mathtt{while}(\Sigma)}$ må vi indføre variabler (egentlig variabelnavne) og termer i stil med hvad vi gjorde for sproget FA (Eksempel 9) . Vi definerer en mængde af ***input variable*** *V_i og en mængde af* ***interne variable*** *V_n:*

$$V_i = \{\mathtt{x}', \mathtt{x}'', \mathtt{x}''', \ldots\}.$$
$$V_n = \{\mathtt{z}', \mathtt{z}'', \mathtt{z}''', \ldots\}.$$

Vi benytter igen forkortede skrivemåder $\mathtt{x_n}$ og $\mathtt{z_n}$ for elementerne i V_i og V_n henholdsvis. n kaldes som tidligere for variablen $\mathtt{x_n}$'s indeks. Mængden af ***variable*** *$V_{\mathtt{while}}$ lader vi nu være*

$$V_{\mathtt{while}} = V_i \cup V_n \cup \{\mathtt{y}\}$$

hvor $\mathtt{y}$ kaldes for ***output variablen****. Mængden af* ***termer*** *$T_\Sigma \subseteq \Sigma^*$ defineres rekursivt ved følgende definition*

(*i*) *Hvis $v \in V_{\mathtt{while}}$ så $v \in T_\Sigma$.*

(*ii*) *Hvis $a \in \Sigma^*$ så $a \in T_\Sigma$.*

(*iii*) *Hvis $t \in T_\Sigma$ så $\mathtt{last}(t) \in T_\Sigma$.*

(*iv*) *Hvis $t \in T_\Sigma$ så $\mathtt{nlast}(t) \in T_\Sigma$.*

(*v*) *Hvis $t_1, t_2 \in T_\Sigma$ så $\mathtt{conc}(t_1, t_2) \in T_\Sigma$.*

(*vi*) *Hvis $t_1, t_2 \in T_\Sigma$ så $\mathtt{eq}(t_1, t_2) \in T_\Sigma$.*

Vi kan nu definere mængden af prædikatnavne $Pr_{\mathtt{while}(\Sigma)}$ rekursivt ved

(*i*) *Hvis $v \in V_{\mathtt{while}}$ og $t \in T_\Sigma$ så $v{:=}t \in Pr_{\mathtt{while}(\Sigma)}$.*

(*ii*) *Hvis $p_1, p_2 \in Pr_{\mathtt{while}(\Sigma)}$ så $p_1;p_2 \in Pr_{\mathtt{while}(\Sigma)}$*

(iii) Hvis $t \in T_\Sigma$ *og* $p \in Pr_{\texttt{while}(\Sigma)}$ *så*

$$\texttt{while}\ t\ \texttt{do}\ p\ \texttt{end}\ \in Pr_{\texttt{while}(\Sigma)}.$$

Mængden $Pr_{\texttt{while}(\Sigma)}$ *splittes op i mængderne* $Pr^{(n)}_{\texttt{while}(\Sigma)}$ *på følgende måde*

$$Pr^{(n)}_{\texttt{while}(\Sigma)} = \{p \in Pr_{\texttt{while}(\Sigma)} \mid \texttt{x}_{\texttt{n}-1} \textit{ er input variablen } \textit{ i } p \textit{ med det højeste indeks}\}$$

Bemærk at vi med denne definition får $Pr^{(0)}_{\texttt{while}(\Sigma)} = \emptyset$.

Vi skal nu definere en semantik for sproget $\texttt{while}(\Sigma)$, *som skal præcisere den ovenfor angivne intuition. Denne semantik defineres vha. hukommelsestilstande. En* ***hukommelsestilstand*** f *i* $\texttt{while}(\Sigma)$ *er en endelig funktion* $f \subseteq V_{\texttt{while}} \times \Sigma^*$. *En hukommelsestilstand er altså en funktion som knytter værdier fra* Σ^* *til en endelig delmængde af elementerne i* $V_{\texttt{while}}$. *Mængden af alle hukommelsestilstande i* $\texttt{while}(\Sigma)$ *betegnes* mem_Σ. *Vi har således*

$$\mathrm{mem}_\Sigma = \left\{ \{(v_1, k_1), \ldots, (v_n, k_n)\} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, v_i \in V_{\texttt{while}}, k_i \in \Sigma^* \right\}.$$

Når vi udfører et program (et prædikatnavn) i sproget $\texttt{while}(\Sigma)$ *har vi til ethvert tidspunkt under programudførslen en entydig hukommelsestilstand, som opregner hvilke værdier der er knyttet til hvilke variable. En programudførsel kan derfor ses som en følge af hukommelsestilstande, hvor outputtet fra programudførslen på det eventuelle termineringstidspunkt er værdien* $f(\texttt{y})$, *hvor* f *er hukommelsestilstanden til dette tidspunkt og* $\texttt{y}$ *er output variablen. Givet en hukommelsestilstand* $f \in \mathrm{mem}_\Sigma$ *og en term* $t \in T_\Sigma$ ***betegner*** t ***under*** f *et bestemt element i* Σ^*. *Dette element benævnes* $\mathrm{bet}_\Sigma(t, f)$, *hvor*

$$\mathrm{bet}_\Sigma : T_\Sigma \times \mathrm{mem}_\Sigma \to \Sigma^*$$

defineres rekursivt på længden af $t \in T_\Sigma$ *ved*

(i) Hvis $t \in V_{\texttt{while}}$ *så* $\mathrm{bet}_\Sigma(t, f) = \begin{cases} f(t) & \textit{hvis } t \in \mathrm{dom}(f) \\ () & \textit{ellers} \end{cases}$

(ii) Hvis $t \in \Sigma^*$ *så* $\mathrm{bet}_\Sigma(t, f) = t$.

(iii) Hvis $t_1 = \texttt{last}(t_2)$ *så* $\mathrm{bet}_\Sigma(t_1, f) = \begin{cases} \alpha_n & \textit{hvis } \mathrm{bet}_\Sigma(t_2, f) = \alpha_1 \ldots \alpha_n \\ () & \textit{hvis } \mathrm{bet}_\Sigma(t_2, f) = () \end{cases}$

(iv) Hvis $t_1 = \texttt{nlast}(t_2)$ *så*

$$\mathrm{bet}_\Sigma(t_1, f) = \begin{cases} \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} & \textit{hvis } \mathrm{bet}_\Sigma(t_2, f) = \alpha_1 \ldots \alpha_n \\ () & \textit{hvis } \mathrm{bet}_\Sigma(t_2, f) = () \end{cases}$$

(*v*) *Hvis* $t_1 = \texttt{conc}(t_2, t_3)$ *så* $\mathrm{bet}_\Sigma(t_1, f) = ab$, *hvor* $a = \mathrm{bet}_\Sigma(t_2, f)$ *og* $b = \mathrm{bet}_\Sigma(t_3, f)$.

(*vi*) *Hvis* $t_1 = \texttt{eq}(t_2, t_3)$ *så*

$$\mathrm{bet}_\Sigma(t_1, f) = \begin{cases} \Sigma_1 & \textit{hvis } \mathrm{bet}_\Sigma(t_2, f) = \mathrm{bet}_\Sigma(t_3, f) \\ () & \textit{ellers} \end{cases}$$

Meningen med (*vi*) *er at hvis* t_2 *og* t_3 *betegner forskellige elementer i* Σ^* *så vil* $\texttt{eq}(t_2, t_3)$ *betegne* $()$, *som er vores modstykke til konstanten* `false`, *og hvis* t_2 *og* t_3 *betegner samme element, da vil* $\texttt{eq}(t_2, t_3)$ *betegne det første element i følgen* Σ, *som kan opfattes som modstykke til konstanten* `true`. `eq` *er en forkortelse af "equal" eller "is equal".*

Som vi var inde på tidligere vil enhver terminerende programudførsel, dvs. en programudførsel som på et tidspunkt slutter, afbilde en starthukommelsestilstand på en sluthukommelsestilstand. Givet et prædikatnavn $p \in Pr_{\texttt{while}(\Sigma)}$, *en starthukommelsestilstand* $f \in \mathrm{mem}_\Sigma$ *og en til* p *og* f *hørende sluthukommelsestilstand* $g \in \mathrm{mem}_\Sigma$ *siger vi at* p ***beregner*** g ***udfra*** f. *Vi skriver* $\mathrm{ber}_\Sigma(p, f) = g$, *hvor*

$$\mathrm{ber}_\Sigma : Pr_{\texttt{while}(\Sigma)} \times \mathrm{mem}_\Sigma \to \mathrm{mem}_\Sigma$$

defineres rekursivt på længden af $p \in Pr_{\texttt{while}(\Sigma)}$ *ved*

(*i*) *Hvis* $p = v{:=}t$ *så* $\mathrm{ber}_\Sigma(p, f) = \{(v, \mathrm{bet}_\Sigma(t, f))\} \cup f \restriction (V_{\texttt{while}} - \{v\})$.

(*ii*) *Hvis* $p = p_1;p_2$ *så* $\mathrm{ber}_\Sigma(p, f) = \mathrm{ber}_\Sigma(p_2, \mathrm{ber}_\Sigma(p_1, f))$.

(*iii*) *Hvis* $p = \texttt{while}\ t\ \texttt{do}\ p_1\ \texttt{end}$ *så* $\mathrm{ber}_\Sigma(p, f) = f_n$, *hvis der eksisterer en endelig følge* $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ *med følgende egenskaber*

- (*a*) $f_0 = f$.
- (*b*) $f_{i+1} = \mathrm{ber}_\Sigma(p_1, f_i)$ *for alle* $i < n$.
- (*c*) $\mathrm{bet}_\Sigma(t, f_i) \neq ()$ *for alle* $i < n$.
- (*d*) $\mathrm{bet}_\Sigma(t, f_n) = ()$.

Hvis en sådan endelig følge ikke eksisterer, lader vi $\mathrm{ber}_\Sigma(p, f) = \emptyset$.

Meningen med (*iii*) *er at vi gentagne gange udfører* p *mens vi heletiden opdaterer hukommelsestilstanden* f_i. *Hvis vi på et tidspunkt kommer til en hukommelsestilstand* f_n *under hvilken* t *betegner* $()$, *da slutter vi med at udføre* p, *og lader* $\mathrm{ber}_\Sigma(p, f)$ *være den på dette tidspunkt opnåede hukommelsestilstand. Hvis vi kan fortsætte med at udføre* p *uden at* t *på noget tidspunkt kommer til at betegne* $()$, *vil programudførslen være ikke-terminerende, og i dette tilfælde lader vi* p *udfra* f *beregne den tomme hukommelsestilstand* $\emptyset \in \mathrm{mem}_\Sigma$.

Udfra afbildningen ber_Σ *kan vi nu definere navngivningsafbildningen for* $\mathtt{while}(\Sigma)$. *Lad* $p \in Pr^{(n)}_{\mathtt{while}(\Sigma)}$. *Vi siger at* p ***givet input*** $(k_1, \dots, k_{n-1})$ ***beregner output*** k_n *hvis*

$$(\mathtt{y}, k_n) \in \mathrm{ber}_\Sigma(p, \{(\mathtt{x_1}, k_1), \dots, (\mathtt{x_{n-1}}, k_{n-1})\})$$

dvs. hvis p *udfra starthukommelsestilstanden givet ved at input variablene* $\mathtt{x_1}, \dots, \mathtt{x_{n-1}}$ *betegner* $k_1, \dots, k_{n-1}$ *henholdsvis, vil beregne en sluthukommelsestilstand i hvilken output variablen* $\mathtt{y}$ *betegner* k_n. *Vi lader nu*

$$\begin{aligned} E_{\mathtt{while}(\Sigma)}(p) &= \{(k_1, \dots, k_n) \mid p \textit{ givet input } (k_1, \dots, k_{n-1}) \textit{ beregner output } k_n\} \\ &= \{(k_1, \dots, k_n) \mid (\mathtt{y}, k_n) \in \mathrm{ber}_\Sigma(p, \{(\mathtt{x_1}, k_1), \dots (\mathtt{x_{n-1}}, k_{n-1})\})\} . \end{aligned}$$

Da det altid er meningsfuldt at spørge om p *med input* $k_1, \dots, k_{n-1}$ *giver output* k_n *lader vi*

$$M_{\mathtt{while}(\Sigma)}(p) = K^n_{\mathtt{while}(\Sigma)} \textit{ for alle } p \in Pr^{(n)}_{\mathtt{while}(\Sigma)}$$

hvorved $\mathtt{while}(\Sigma)$ *bliver et enkelttypet sprog. Dette afslutter vor definition af* $\mathtt{while}(\Sigma)$.

Eksempel 58. De i praksis forekommende imperative programmeringssprog vil typisk have en udvidet syntaks i forhold til den vi ovenfor har givet for `while`-sprogene. Man arbejder for eksempel med prædikatnavne af typen

$$\mathtt{if}\ t\ \mathtt{then}\ p_1\ \mathtt{else}\ p_2\ \mathtt{end}$$

og

$$\mathtt{repeat}\ p\ \mathtt{until}\ t\ \mathtt{end}.$$

Sådanne prædikatnavne indføres blot for at lette programmeringen og læsningen af programmerne—de giver ikke anledning til en rigere semantik, idet de alle kan omskrives til ren $\mathtt{while}(\Sigma)$ syntaks. Når vi i det følgende i et prædikatnavn $p \in Pr_{\mathtt{while}(\Sigma)}$ skriver $\mathtt{if}\ t\ \mathtt{then}\ p_1\ \mathtt{end}$ med $t \in T_\Sigma$ og $p_1 \in Pr_{\mathtt{while}(\Sigma)}$ skal det da opfattes som en forkortelse for

$$v\mathtt{:=}t\mathtt{;}\ \mathtt{while}\ v\ \mathtt{do}\ p_1\mathtt{;}\ v\mathtt{:=()}\ \mathtt{end} \tag{17}$$

hvor $v \in V_n$ er en intern variabel som ikke forekommer andre steder i p. Det ses at en udførsel af (17) som en del af p svarer til at udføre p_1 én gang hvis t betegner en streng $\neq ()$ og ellers ikke foretage noget (tildelingerne til v er underordnede da v ikke forekommer andre steder i p). Tilsvarende kan vi opfatte et udtryk på formen `if` t `then` p_1 `else` p_2 `end` hvor $t \in T_\Sigma$ og $p_1, p_2 \in Pr_{\texttt{while}(\Sigma)}$ som en forkortelse for

$$\begin{array}{l} v_1 \texttt{:=} t\texttt{;}\ v_2 \texttt{:=} \Sigma_1\texttt{;} \\ \texttt{while}\ v_1\ \texttt{do}\ p_1\texttt{;}\ v_1\texttt{:=}()\texttt{;}\ v_2\texttt{:=}()\ \texttt{end;} \\ \texttt{while}\ v_2\ \texttt{do}\ p_2\texttt{;}\ v_2\texttt{:=}()\ \texttt{end} \end{array}$$

hvor $v_1, v_2 \in V_n$ er interne variable som ikke forekommer andre steder i det prædikatnavn hvori udtrykket indgår.

Overskueligheden af et program kan desuden lettes ved at benytte sig af "subprocedurer" i programmet. Lad $p_1 \in Pr^{(n)}_{\texttt{while}(\Sigma)}$ og lad $v_1, \ldots, v_{n+1} \in V_{\texttt{while}}$. Når vi i et prædikatnavn $p \in Pr_{\texttt{while}(\Sigma)}$ skriver

$$v_{n+1} \texttt{:=} p_1(v_1, \ldots, v_n)$$

skal det opfattes som en forkortelse for prædikatnavnet p_1, hvori alle forekomster af $x_1, \ldots, x_n, y$ er erstattet af $v_1, \ldots, v_{n+1}$ henholdsvis, og hvori alle andre forekommende variable er erstattet med nye variable som ikke i forvejen forekommer i p. Forekomsten af $v_{n+1} \texttt{:=} p_1(v_1, \ldots, v_n)$ i p kan ses som et "subprocedure-" eller "funktions-kald" af programmet p_1 i programmet p.

Eksempel 59. Vi vil i dette eksempel vise at afbildningen

$$o_{FA} = O_{FA} \restriction Pr^{(1)}_{FA}$$

som vi benyttede i Afsnit 6.4 har navn i $\texttt{while}(\Sigma_{FA})$. Vi skal altså konstruere et prædikatnavn `subst` $\in Pr^{(3)}_{\texttt{while}(\Sigma_{FA})}$ som givet input $(p, k) \in Pr^{(1)}_{FA} \times K_{FA}$ beregner output

$$o_{FA}(p, k) = O_{FA}(p, k) = p(k),$$

dvs. som tager prædikatnavnet p og heri erstatter alle frie variabelforekomster med k. Konstruktionen deles op i trin ved at benytte "subprocedurer" som vi introducerede i ovenstående eksempel. Først angiver vi et prædikatnavn `takevar` $\in Pr^{(2)}_{\texttt{while}(FA)}$ som udfra en hukommelsestilstand hvori $\texttt{x}_1$ betegner en streng på formen αx_i med $x_i = x'' \cdots ' x \in V_{FA}$ vil beregne en hukommelsestilstand hvor $\texttt{y}$ betegner x_i og $\texttt{x}_1$ betegner α. `takevar` defineres som følgende prædikatnavn

$$\begin{array}{l} \texttt{y} := x;\ \texttt{x}_1 := \texttt{nlast}(\texttt{x}_1); \\ \texttt{while eq}(\texttt{last}(\texttt{x}_1), ')\ \texttt{do} \\ \quad \texttt{x}_1 := \texttt{nlast}(\texttt{x}_1);\ \texttt{y} := \texttt{conc}(', \texttt{y}) \\ \texttt{end}; \\ \texttt{x}_1 := \texttt{nlast}(\texttt{x}_1);\ \texttt{y} := \texttt{conc}(x, \texttt{y}) \end{array}$$

Man overbeviser sig let om at det givne prædikatnavn har den ønskede egenskab. Vi kan nu benytte `takevar` til at konstruere et nyt prædikatnavn `freeocc` $\in Pr^{(3)}_{\texttt{while}(FA)}$ med følgende egenskab:

hvis $\alpha x_i \beta \in Pr^{(1)}_{FA}$ med $x_i \in V_{FA}$ vil `freeocc` udfra en hukommelsestilstand hvor $\mathtt{x}_1$ betegner α og $\mathtt{x}_2$ betegner x_i beregne en hukommelsestilstand hvor `y` betegner 0 hvis forekomsten af x_i mellem α og β i $\alpha x_i \beta$ er fri og () hvis forekomsten er bunden (værdierne betegnet af $\mathtt{x}_1$ og $\mathtt{x}_2$ er bevarede).

`freeocc` defineres som følgende prædikatnavn

```
if eq(last(x₁),∃) then y := (); z₁ := () else
  if eq(last(x₁),∀) then y := (); z₁ := () else y := 0; z₁ := x₁ end
end;
while z₁ do
  z₂ := 0;
  while z₂ do
    if eq(last(z₁),[) then z₂ := nlast(z₂) else
      if eq(last(z₁),]) then z₂ := conc(z₂,0) end
    end;
    z₁ := nlast(z1); if eq(z₁,()) then z₂ := () end
  end;
  if eq(last(z₁),x) then
    z₃ := takevar(z₁);
    if eq(z₃,x₂) then y := (); z₁ := () end
  end
end
```

Hjertet i ovenstående `while`-program er en løbende optælling af forekomsterne af [og] i strengen α (som $\mathtt{x}_1$ betegner i starthukommelsestilstanden) for at lede efter variabelforekomster som "binder" variabelnavnet x_i (som $\mathtt{x}_2$ betegner i starthukommelsetilstanden) i strengen $\alpha x_i \beta$. Udfra `takevar` og `freeocc` er vi nu i stand til at give prædikatnavnet `subst` som udfra en hukommelsestilstand hvor $\mathtt{x}_1$ betegner $p \in Pr^{(1)}_{FA}$ og $\mathtt{x}_2$ betegner $k \in K_{FA}$ giver en hukommelsestilstand hvor `y` betegner $p(k)$, som er resultatet af at erstatte alle frie variabelforekomster i p med k. `subst` får følgende udseende

```
while x₁ do
  if eq(last(x1),x) then
    z₁ := takevar(x₁); z₂ := freeocc(x₁,z₁);
    if z₂ then y := conc(x₂,y) else y := conc(z₁,y) end
  else
    y := conc(last(x₁),y); x₁ := nlast(x₁)
  end
end
```

Hvis et prædikatnavn $p \in Pr^{(3)}_{\mathtt{while}(\Sigma_{FA})}$ skal være navn for o_{FA} må det som `while`-sprogene og begrebet "navn for" er defineret ikke beregne noget output hvis det gives input $(k_1, k_2) \notin \mathrm{dom}(o_{FA})$. Derfor er `subst` ikke navn for o_{FA} — men hvis vi antager at $\texttt{etplads} \in Pr^{(2)}_{\texttt{while}(\Sigma_{FA})}$ er et navn for $Pr^{(1)}_{FA} \times \{0\}$ da vil følgende prædikatnavn være navn for o_{FA} :

```
y := etplads(x1);
if eq(x2, ()) then
  while 0 do y := y end
end;
z1 := x2;
while z1 do
  if eq(last(z1),0) then z1 := nlast(z1) end
end;
y := subst(x1, x2)
```

Antag ovenstående `while`-program sættes igang med input $(k_1, k_2) \in (\Sigma^*_{FA})^2$. Hvis $k_1 \notin Pr^{(1)}_{FA}$ vil programudførslen aldrig komme længere end til den første linie. Hvis $k_2 = ()$ vil programudførslen sidde fast i den anden linie af programmet, og hvis k_2 indeholder symboler forskellige fra 0 vil programudførslen fortsætte uendeligt med at gentage linierne 6 til 8. Det ses således at programmet som ønsket er ikke-terminerende hvis det gives input $(k_1, k_2) \notin \mathrm{dom}(o_{FA})$. Vi vil ikke her gøre os den umage at konstruere prædikatnavnet `etplads`, da dette er en noget omstændelig—men i øvrigt uproblematisk—opgave udfra definitionen af $Pr^{(1)}_{FA}$.

I Appendix A er ovenstående `while`-programmer oversat til syntaksen som benyttes i programmeringssproget Mathematica, og Mathematica er anvendt til at afprøve programmet `subst` givet følgende input

$$(\exists x_2[x_2 + x_1 = \overline{0} \wedge \forall x_1[x_1 \cdot x_2 = x_1]], \overline{1}).$$

Da Mathematica ikke kan håndtere symboler som $\forall$ og $\wedge$ benyttes istedet følgende symboler:

der benyttes	istedet for
E	$\exists$
A	$\forall$
|	$\vee$
&	$\wedge$
$\sim$	$\neg$
*	$\cdot$

Vi kan nu præcisere hvad vi mener med mekanisk eller algoritmisk afgørbarhed af medlemsskab i en mængde, og dermed kan vi få præciseret hvad vi vil kræve af en realistisk bevisrelation. I overensstemmelse med den eksisterende litteratur vil vi kalde en mængde M for **rekursiv** hvis der eksisterer en algoritme, som kan afgøre medlemsskab i mængden. Som nævnt opfatter vi eksistensen af en sådan algoritme som ækvivalent med eksistensen af et computerprogram der med m som input kan svare på om $m \in M$ eller ej. At sige at computerprogrammet "svarer på" om $m \in M$ kan præciseres ved at kræve at computerprogrammet givet input m skal beregne output Σ_1 hvis $m \in M$ og output () hvis $m \notin M$. Vi præciserer

Definition 60. *En mængde M kaldes **rekursiv** hvis $M \subseteq (\Sigma^*)^n$ for en endelig følge Σ og der eksisterer et prædikatnavn $p \in Pr^{(n+1)}_{\mathtt{while}(\Sigma)}$ med*

$$M = \{(k_1, \ldots, k_n) \mid (k_1, \ldots, k_n, \Sigma_1) \in E_{\mathtt{while}(\Sigma)}(p)\}$$
$$(\Sigma^*)^n - M = \{(k_1, \ldots, k_n) \mid (k_1, \ldots, k_n, ()) \in E_{\mathtt{while}(\Sigma)}(p)\}$$

Begrebet "realistisk bevisrelation" defineres nu igennem begrebet rekursiv mængde.

Definition 61. *Lad σ være et formelt sprog og lad $B \subseteq \Sigma^* \times T_\sigma$ være en bevisrelation for σ. B kaldes en **realistisk bevisrelation** hvis B er rekursiv.*

Bemærkninger og referencer De her introducerede `while`-sprog er en variant af `while`-sprogene som defineres hos Odifreddi ([Odi92]) og Jones ([Jon97]). Ved at indføre begreberne input variable, output variable og interne variable har jeg opnået at få en lidt simplere syntaks og lidt kortere programmer end hos Odifreddi og Jones, hvor ethvert program må indledes med en kommando `read` $\mathtt{x_1}, \ldots, \mathtt{x_n}$ og afsluttes med en kommando `write` $\mathtt{x_i}$. Dette betyder blandt andet at hos de to forfattere kan to programmer ikke uden videre konkateneres, hvilket gør at der hos disse forfattere må skelnes imellem kommandoer og programmer, som gør hele behandlingen af `while`-sproget lidt mere kompliceret.

Valget af at definere rekursivitet igennem programmering er truffet, da dette i disse moderne computer-tider synes at være mest naturligt, fremfor f.eks. at indføre Gödels μ-rekursive funktioner, hvortil det er vanskeligt at få knyttet en god intuition omkring styrken af det definerede begreb. At valget af programmeringssprog er faldet på `while` skyldes at dette sprog forekommer som det intuitivt mest naturlige bud på et universelt sprog til formulering af algoritmer. Dette skyldes dels at `while`-sproget er imperativt og dels at det er det mest velkendte sprog i computerverdenen, idet det udgør grundlaget for sprog som C og Pascal. Sproget `while` er udelukkende valgt på grund at dets fortrin med hensyn til intuition—på det tekniske plan kunne vi have klaret os noget lettere ved at vælge et funktionsprogrammeringssprog, for slet ikke at tale om et logikprogrammeringssprog.

Programmerne i Eksempel 59 har jeg selv skrevet.

8 Begrænsninger i formelle systemer

8.1 Gödels Ufuldstændighedsteorem

Med indførslen af begrebet “realistisk bevisrelation” kan vi nu præcisere (16) på følgende måde:

> Der eksisterer sande matematiske sætninger som ikke kan bevises med en realistisk bevisrelation. (18)

Vi mangler stadig at præcisere hvad en matematisk sætning og en sand matematisk sætning er, men vi kan i hvert fald uden videre opfatte enhver af sætningerne i *FA*, der alle udtrykker egenskaber ved de naturlige tal, som matematiske sætninger. For disse sætninger har vi allerede defineret et sandhedsbegreb. Vi skal i dette afsnit vise at der gælder

> Der eksisterer sande sætninger i *FA* som ikke kan bevises med en realistisk bevisrelation. (19)

hvoraf (18) følger, hvis vi regner den formelle talteori i *FA* som en del af matematikken. Resultatet (19) er Gödels Ufuldstændighedsteorem, i en lidt generaliseret variant. Før vi når frem til dette resultat må vi igennem en del tekniske beviser. Vi starter blødt med

Lemma 62. *For enhver endelig følge Σ har mængden*

$$E = \left\{ k \in \operatorname{ran}(g_\Sigma) \mid \textit{strengen } g_\Sigma^{-1}(k) \textit{ består af netop ét symbol} \right\}$$

navn i FA.

Bevis Antag $\Sigma = (s_1, \dots, s_m)$. Da der så for alle $i \in \{1, \dots, m\}$ gælder $h_\Sigma(s_i) = i$ og hermed $g_\Sigma(s_i) = \overline{i}$ fås

$$\begin{aligned}
&\overline{n} \in E \\
\Leftrightarrow\ & g_\Sigma^{-1}(\overline{n}) = s_i \text{ for en } i \in \{1, \dots, m\} \\
\Leftrightarrow\ & \overline{n} = g_\Sigma(s_i) = \overline{i} \text{ for en } i \in \{1, \dots, m\} \\
\Leftrightarrow\ & [\overline{L}(\overline{n}, \overline{m+1}) \land \neg \overline{n} = \overline{0}] \in T_{FA}
\end{aligned}$$

dvs. $\overline{L}(x_1, \overline{m+1}) \land \neg x_1 = \overline{0}$ er navn for E. $\square$

Hvis $g : \Sigma^* \to K_\sigma$ er en Gödel-kodning i et formelt sprog σ vil vi for alle $M \subseteq (\Sigma^*)^n$ lade

$$g(M) = \{(g(k_1), \dots, g(k_n)) \mid (k_1, \dots, k_n) \in M\}.$$

Hvis $f \subseteq (\Sigma^*)^n$ er en funktion bliver $g(f)$ således en funktion

$$g(f) : g(\operatorname{dom}(f)) \to g(\operatorname{ran}(f))$$

med egenskaben

$$g(f)(k_1, \dots, k_{n-1}) = g(f(g^{-1}(k_1), \dots, g^{-1}(k_{n-1}))).$$

Teorem 63. *Lad Σ være en endelig følge og lad $M \subseteq (\Sigma^*)^n$. Hvis M har navn i* $\mathtt{while}(\Sigma)$ *så har $g_{\Sigma'}(M)$ navn i FA for en $\Sigma' \supseteq \Sigma$.*

Bevis Lad # og | betegne to symboler som ikke indgår i Σ og som er forskellige fra symbolerne $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$, $\mathtt{z}$ og $'$. Lad nu

$$\Sigma' = \Sigma(\#, |, \mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}, ').$$

I lighed med tidligere lader vi af notationsmæssige årsager $g = g_{\Sigma'}$. Vi skal vise at for alle $p \in Pr^{(n)}_{\mathtt{while}(\Sigma)}$ har billedet under g af mængden

$$E_{\mathtt{while}(\Sigma)}(p) = \{(k_1, \dots, k_n) \mid (\mathtt{y}, k_n) \in \mathrm{ber}_\Sigma(p, \{(\mathtt{x_1}, k_1), \dots, (\mathtt{x_{n-1}}, k_{n-1})\})\}$$

navn i *FA*. Hertil har vi brug for at "repræsentere" afbildningen ber_Σ i *FA*. ber_Σ er en afbildning af typen

$$Pr_{\mathtt{while}(\Sigma)} \times \mathrm{mem}_\Sigma \to \mathrm{mem}_\Sigma.$$

For at kunne repræsentere ber_Σ i *FA* må vi kunne repræsentere elementerne fra mem_Σ som elementer i K_{FA}. Det gøres på følgende måde. Lad

$$R = \left\{ \#v_1|k_1\#v_2|k_2\# \cdots \#v_n|k_n\# \in S^* \middle| n \in \mathbb{N}, v_i \in V_{\mathtt{while}}, k_i \in \Sigma^* \right\}$$

og definér $r : R \to \mathrm{mem}_\Sigma$ ved

$$r(\#v_1|k_1\# \cdots \#v_n|k_n\#) = \{(v_1, k_1), \dots, (v_n, k_n)\}.$$

r er veldefineret da $V_{\mathtt{while}}$ og Σ ikke indeholder symbolerne som | og # betegner. For alle $v_1, \dots, v_n \in V_{\mathtt{while}}$ og alle $k_1, \dots, k_n \in \Sigma^*$ kan vi benytte

$$\varphi = \#v_1|k_1\# \cdots \#v_n|k_n\# \in R$$

som en "repræsentation" i S^* af elementet

$$f = \{(v_1, k_1), \dots, (v_n, k_n)\} = r(\varphi)$$

fra mem_Σ. Bemærk at der her gælder $f(v) = k$ hvis og kun hvis $\#v|k\#$ er en delstreng af φ. Vi kan videre benytte

$$k = g(\varphi) = g(\#v_1|k_1\# \cdots \#v_n|k_n\#)$$

som en repræsentation af f i K_{FA}. Hermed bliver $g(R)$ mængden af alle repræsentationer i K_{FA} af elementer fra mem_Σ.

Påstand 1. *$g(R)$ har navn i FA.*

Bevis Vi viser først at mængderne $g(V_{\texttt{while}})$ og $g(\Sigma^*)$ har navne i FA. Der gælder

$$
\begin{aligned}
& k \in g(V_{\texttt{while}}) \\
\Leftrightarrow\ & k \in \operatorname{ran}(g) \text{ og } g^{-1}(k) = \texttt{y} \text{ eller der eksisterer en streng } \alpha = {}''\cdots{}' \text{ af apostroffer så } g^{-1}(k) = \texttt{x}\alpha \text{ eller } g^{-1}(k) = \texttt{z}\alpha. \\
\Leftrightarrow\ & k = \underline{\texttt{y}} \vee \exists x_2 \big[\forall x_3[\overline{D}(x_3, x_2) \wedge \overline{E}(x_3) \rightarrow x_3 = \underline{'}] \wedge \\
& \qquad [k = \underline{\texttt{x}} * x_2 \vee k = \underline{\texttt{z}} * x_2]\big] \in T_{FA}
\end{aligned}
$$

som viser at $g(V_{\texttt{while}})$ har navn i FA. Lad m betegne antallet af elementer i Σ. $g(\Sigma^*)$ har navn i FA da

$$
\begin{aligned}
& k \in g(\Sigma^*) \\
\Leftrightarrow\ & k \in \operatorname{ran}(g) \text{ og } g^{-1}(k) \text{ er en streng af symboler fra } \Sigma \\
\Leftrightarrow\ & \overline{\operatorname{ran}(g)}(k) \wedge \forall x_2[\overline{D}(x_2, k) \wedge \overline{E}(x_2) \rightarrow \\
& \qquad x_2 = \underline{\Sigma_1} \vee x_2 = \underline{\Sigma_2} \vee \cdots \vee x_2 = \underline{\Sigma_m}] \in T_{FA}
\end{aligned}
$$

Vi er nu klar til at vise at $g(R)$ har navn i FA.

$$
\begin{aligned}
& k \in g(R) \\
\Leftrightarrow\ & k \in \operatorname{ran}(g) \text{ og } g^{-1}(k) \text{ er en streng på formen } \#v_1|k_1\# \cdots \#v_n|k_n\# \text{ hvor } n \in \mathbb{N}, v_i \in V_{\texttt{while}}, k_i \in \Sigma^*. \\
\Leftrightarrow\ & k \in \operatorname{ran}(g) \text{ og } g^{-1}(k) = \#\# \text{ eller } g^{-1}(k) \text{ er en streng som begynder og slutter på } \# \text{ og i enhver delstreng af } g^{-1}(k) \text{ på formen } \#\alpha\#, \text{ hvor } \alpha \\
& \text{ikke indeholder } \#, \text{ er } \alpha \text{ på formen } v|k \text{ med } v \in V_{\texttt{while}} \text{ og } k \in \Sigma^*. \\
\Leftrightarrow\ & k = \underline{\#\#} \vee [\overline{P}(\underline{\#}, k) \wedge \overline{S}(\underline{\#}, k) \wedge \forall x_2[\overline{D}(\underline{\#} * x_2 * \underline{\#}, k) \wedge \neg\overline{D}(\underline{\#}, x_2) \rightarrow \\
& \qquad \exists x_3 \exists x_4[x_2 = x_3 * \underline{|} * x_4 \wedge \overline{g(V_{\texttt{while}})}(x_3) \wedge \overline{g(\Sigma^*)}(x_4)]]] \in T_{FA}
\end{aligned}
$$

som viser det ønskede. □

Vi får også brug for at kunne repræsentere endelige, ikke-tomme følger af elementer fra mem_Σ i FA. Hertil lader vi

$$Q = \{\#\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n\# \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}, \varphi_i \in R\}.$$

Enhver endelig, ikke-tom følge $(f_1, \ldots, f_n)$ af elementer i mem_Σ kan nu repræsenteres i S^* ved en streng $\#\varphi_1 \ldots \varphi_n\# \in Q$, hvor $r(\varphi_i) = f_i$. Da alle $\varphi \in R$ både begynder og slutter på $\#$, svarer der til ethvert element i Q på entydig måde en endelig følge $(f_1, \ldots, f_n)$ af elementer i mem_Σ. Vi kan da repræsentere $(f_1, \ldots, f_n)$ ved konstantnavnet $g(\#\varphi_1 \ldots \varphi_n\#)$ i FA. $g(Q)$ bliver mængden af alle repræsentationer i K_{FA} af endelige, ikke-tomme følger over mem_Σ.

Påstand 2. *$g(Q)$ har navn i FA.*

Bevis Der gælder

$k \in g(Q)$

$\Leftrightarrow k \in \operatorname{ran}(g)$ og $g^{-1}(k)$ er en streng på formen $\#\varphi_1 \ldots \varphi_n\#$ hvor $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ og $\varphi_i \in R$.

$\Leftrightarrow k \in \operatorname{ran}(g)$ og $g^{-1}(k)$ begynder og slutter på $\#\#$ og for enhver delstreng af $g^{-1}(k)$ på formen $\#\#\alpha\#\#$, hvor α ikke indeholder $\#\#$, gælder $\#\alpha\# \in R$.

$\Leftrightarrow \overline{P}(\underline{\#\#}, k) \wedge \overline{S}(\underline{\#\#}, k) \wedge \forall x_2[\overline{D}(\underline{\#\#} * x_2 * \underline{\#\#}, k) \wedge$
$\qquad \neg\overline{D}(\underline{\#\#}, x_2) \to \overline{g(R)}(\underline{\#} * x_2 * \underline{\#})] \in T_{FA}$

som viser det ønskede. $\square$

Vi vil vise at der for ethvert prædikatnavn $p \in Pr_{\texttt{while}(\Sigma)}$ eksisterer et prædikatnavn $br_p(x_1, x_2) \in Pr^{(2)}_{FA}$ med følgende egenskab

$$\begin{array}{l} \text{for alle } \varphi_1, \varphi_2 \in R \text{ gælder:} \\ \quad \operatorname{ber}_\Sigma(p, r(\varphi_1)) = r(\varphi_2) \\ \Updownarrow \\ \quad br_p(\underline{\varphi_1}, \underline{\varphi_2}) \in T_{FA}. \end{array} \tag{1}$$

Hvis denne egenskab er opfyldt ses prædikatnavnene br_p tilsammen at udgøre en "repræsentation" af afbildningen $\operatorname{ber}_\Sigma$ i FA. Har vi først fundet prædikatnavne br_p for alle $p \in Pr_{\texttt{while}(\Sigma)}$ opfyldende (1) gælder for ethvert $p \in Pr^{(n)}_{\texttt{while}(\Sigma)}$ og alle $(k_1, \ldots, k_n) \in \Sigma^*$:

$(k_1, \ldots, k_n) \in E_{\texttt{while}(\Sigma)}(p)$

$\Leftrightarrow (\texttt{y}, k_n) \in \operatorname{ber}_\Sigma(p, \{(\texttt{x}_1, k_1), \ldots, (\texttt{x}_{\texttt{n}-1}, k_{n-1})\})$

$\Leftrightarrow \operatorname{ber}_\Sigma(p, r(\varphi_1)) = r(\varphi_2)$, hvor $\varphi_1 = \#\texttt{x}_1|k_1\#\texttt{x}_2|k_2\# \cdots \#\texttt{x}_{\texttt{n}-1}|k_{n-1}\#$ og $\varphi_2 \in R$ indeholder $\#\texttt{y}|k_n\#$ som delstreng.

$\Leftrightarrow br_p(\underline{\varphi_1}, \underline{\varphi_2}) \in T_{FA}$, hvor $\varphi_1 = \#\texttt{x}_1|k_1\#\texttt{x}_2|k_2\# \cdots \#\texttt{x}_{\texttt{n}-1}|k_{n-1}\#$ og $\varphi_2 \in R$ indeholder $\#\texttt{y}|k_n\#$ som delstreng.

$\Leftrightarrow \exists x_{n+1}[br_p(\underline{\#\texttt{x}_1|k_1\# \cdots \#\texttt{x}_{\texttt{n}-1}|k_{n-1}\#}, x_{n+1}) \wedge \overline{g(R)}(x_{n+1}) \wedge$
$\qquad \overline{D}(\underline{\#\texttt{y}|k_n\#}, x_{n+1})] \in T_{FA}$

$\Leftrightarrow \exists x_{n+1}[br_p(\underline{\#\texttt{x}_1|} * \underline{k_1} * \underline{\#} * \cdots * \underline{\#\texttt{x}_{\texttt{n}-1}|} * \underline{k_{n-1}} * \underline{\#}, x_{n+1}) \wedge \overline{g(R)}(x_{n+1}) \wedge$
$\qquad \overline{D}(\underline{\#\texttt{y}|} * \underline{k_n} * \underline{\#}, x_{n+1})] \in T_{FA}$

$\Leftrightarrow (g(k_1), \ldots, g(k_n)) \in E_{FA}\big(\exists x_{n+1}[br_p(\underline{\#\texttt{x}_1|} * x_1 * \underline{\#} * \cdots$
$\qquad * \underline{\#\texttt{x}_{\texttt{n}-1}|} * x_{n-1} * \underline{\#}, x_{n+1}) \wedge \overline{g(R)}(x_{n+1}) \wedge \overline{D}(\underline{\#\texttt{y}|} * x_n * \underline{\#}, x_{n+1})]\big)$

Ovenstående ækvivalens viser at for ethvert $p \in Pr^{(n)}_{\texttt{while}(\Sigma)}$ eksisterer et prædikatnavn $q \in Pr_{FA}^{(n)}$ med

$$\begin{aligned} E_{FA}(q) &= \{(g(k_1), \dots, g(k_n)) \mid (k_1, \dots, k_n) \in E_{\texttt{while}(\Sigma)}(p)\} \\ &= g(E_{\texttt{while}(\Sigma)}(p)) \end{aligned}$$

som er det ønskede resultat. Beviset er således fuldført når vi har vist eksistensen af prædikatnavne $br_p \in Pr_{FA}^{(2)}$ med egenskaben (1). I forbindelse med at opnå en repræsentation af ber_Σ i FA ved prædikatnavnene br_p må vi først finde en repræsentation i FA af afbildningen

$$\mathrm{bet}_\Sigma : T_\Sigma \times \mathrm{mem}_\Sigma \to \Sigma^*.$$

Vi vil vise eksistensen af prædikatnavne $bt_t(x_1, x_2) \in Pr_{FA}^{(2)}$ for alle $t \in T_\Sigma$ med egenskaben

$$\begin{gathered} \text{for alle } \varphi \in R, \alpha \in \Sigma^* \text{ gælder:} \\ \mathrm{bet}_\Sigma(t, r(\varphi)) = \alpha \\ \Updownarrow \\ bt_t(\underline{\varphi}, \underline{\alpha}) \in T_{FA}. \end{gathered} \tag{2}$$

Eksistensen af prædikatnavne $bt_t(x_1, x_2) \in Pr_{FA}^{(2)}$ for alle $t \in T_\Sigma$ opfyldende (2) bevises ved induktion på længden af t efter samme mønster som vi definerede $\mathrm{bet}_\Sigma(t, f)$ rekursivt på længden af t i Definition 57. Vi har altså 6 tilfælde som vi skal gennemgå (de første 2 tilfælde er basistilfælde, de sidste 4 er induktionsskridt):

(i) Hvis $t \in V_{\texttt{while}}$ gælder for alle $\varphi \in R, \alpha \in \Sigma^*$:

$\mathrm{bet}_\Sigma(t, r(\varphi)) = \alpha$

$\Leftrightarrow$ der gælder en af følgende:

(a) $t \in \mathrm{dom}(r(\varphi))$ og $(t, \alpha) \in r(\varphi)$.

(b) $t \notin \mathrm{dom}(r(\varphi))$ og $\alpha = ()$.

$\Leftrightarrow$ der gælder en af følgende:

(a) $\#t|\alpha\#$ er en delstreng af φ.

(b) $\#t|$ er ikke en delstreng af φ og $\alpha = ()$.

$\Leftrightarrow \overline{D}(\underline{\#t|\alpha\#}, \underline{\varphi}) \vee [\neg\overline{D}(\underline{\#t|}, \underline{\varphi}) \wedge \underline{\alpha} = \overline{0}] \in T_{FA}$

dvs. (2) bliver opfyldt for alle $t \in V_{\texttt{while}}$ hvis vi for disse t lader

$$bt_t(x_1, x_2) = \overline{D}(\underline{\#t|} * x_2 * \underline{\#}, x_1) \vee [\neg\overline{D}(\underline{\#t|}, x_1) \wedge x_2 = \overline{0}].$$

(ii) Hvis $t \in \Sigma^*$ gælder

$$\begin{aligned} &\mathrm{bet}_\Sigma(t, r(\varphi)) = \alpha \\ \Leftrightarrow\ & t = \alpha \\ \Leftrightarrow\ & \underline{t} = \underline{\alpha} \in T_{FA} \end{aligned}$$

dvs. (2) bliver opfyldt for alle $t \in \Sigma^*$ hvis vi for disse t lader

$$bt_t(x_1, x_2) = [x_1 = x_1 \wedge x_2 = \underline{t}].$$

(iii) Hvis $t = \texttt{last}(t_2)$ så

$$\begin{aligned}
& \mathrm{bet}_\Sigma(t, r(\varphi)) = \alpha \\
\Leftrightarrow\ & \text{der gælder en af følgende:} \\
& \quad \text{(a) } \mathrm{bet}_\Sigma(t_2, r(\varphi)) = () \text{ og } \alpha = (). \\
& \quad \text{(b) } \alpha \text{ består af netop ét symbol og er suffiks i } \mathrm{bet}_\Sigma(t_2, r(\varphi)). \\
\Leftrightarrow\ & [bt_{t_2}(\underline{\varphi}, \overline{0}) \wedge \underline{\alpha} = \overline{0}] \vee [\overline{E}(\underline{\alpha}) \wedge \exists x_3[\overline{S}(\underline{\alpha}, x_3) \wedge bt_{t_2}(\underline{\varphi}, x_3)]] \in T_{FA}
\end{aligned}$$

idet vi undervejs som induktionsantagelse benytter eksistensen af et prædikatnavn bt_{t_2} opfyldende (2). Ækvivalensen viser at (2) bliver opfyldt for $t = \texttt{last}(t_2)$ hvis vi for disse t lader

$$bt_t(x_1, x_2) = [bt_{t_2}(x_1, \overline{0}) \wedge x_2 = \overline{0}] \vee [\overline{E}(x_2) \wedge \exists x_3[\overline{S}(x_2, x_3) \wedge bt_{t_2}(x_1, x_3)]].$$

(iv) Hvis $t = \texttt{nlast}(t_2)$ så

$$\begin{aligned}
& \mathrm{bet}_\Sigma(t, r(\varphi)) = \alpha \\
\Leftrightarrow\ & \text{der gælder en af følgende:} \\
& \quad \text{(a) } \mathrm{bet}_\Sigma(t_2, r(\varphi)) = () \text{ og } \alpha = (). \\
& \quad \text{(b) der eksisterer et symbol } \beta \in \Sigma \text{ så } \mathrm{bet}_\Sigma(t_2, r(\varphi)) = \alpha\beta. \\
\Leftrightarrow\ & [bt_{t_2}(\underline{\varphi}, \overline{0}) \wedge \underline{\alpha} = \overline{0}] \vee \exists x_3[\overline{E}(x_3) \wedge bt_{t_2}(\underline{\varphi}, \underline{\alpha} * x_3)] \in T_{FA}
\end{aligned}$$

dvs. vi opnår det ønskede ved for alle $t = \texttt{nlast}(t_2)$ at lade

$$bt_t(x_1, x_2) = [bt_{t_2}(x_1, \overline{0}) \wedge x_2 = \overline{0}] \vee \exists x_3[\overline{E}(x_3) \wedge bt_{t_2}(x_1, x_2 * x_3)].$$

(v) Hvis $t = \texttt{conc}(t_2, t_3)$ gælder

$$\begin{aligned}
& \mathrm{bet}_\Sigma(t, r(\varphi)) = \alpha \\
\Leftrightarrow\ & \text{der eksisterer } a, b \in \Sigma^* \text{ så } \mathrm{bet}_\Sigma(t_2, r(\varphi)) = a,\ \mathrm{bet}_\Sigma(t_3, r(\varphi)) = b \\
& \text{og } \alpha = ab. \\
\Leftrightarrow\ & \exists x_3 \exists x_4[bt_{t_2}(\underline{\varphi}, x_3) \wedge bt_{t_3}(\underline{\varphi}, x_4) \wedge \underline{\alpha} = x_3 * x_4] \in T_{FA}
\end{aligned}$$

dvs. vi kan for alle $t = \texttt{conc}(t_2, t_3)$ lade

$$bt_t(x_1, x_2) = \exists x_3 \exists x_4[bt_{t_2}(x_1, x_3) \wedge bt_{t_3}(x_1, x_4) \wedge x_2 = x_3 * x_4].$$

(vi) Hvis $t = \mathtt{eq}(t_2, t_3)$ gælder

$$\begin{aligned}
&\text{bet}_\Sigma(t, r(\varphi)) = \alpha \\
\Leftrightarrow\ &\text{der gælder en af følgende:} \\
&\quad \text{(a) } \text{bet}_\Sigma(t_2, r(\varphi)) = \text{bet}_\Sigma(t_3, r(\varphi)) \text{ og } \alpha = \Sigma_1. \\
&\quad \text{(b) } \text{bet}_\Sigma(t_2, r(\varphi)) \neq \text{bet}_\Sigma(t_3, r(\varphi)) \text{ og } \alpha = (). \\
\Leftrightarrow\ &\exists x_3[bt_{t_2}(\underline{\varphi}, x_3) \wedge bt_{t_3}(\underline{\varphi}, x_3) \wedge \underline{\alpha} = \underline{\Sigma_1}] \vee \\
&\qquad [\neg\exists x_3[bt_{t_2}(\underline{\varphi}, x_3) \wedge bt_{t_3}(\underline{\varphi}, x_3)] \wedge \underline{\alpha} = \overline{0}] \in T_{FA}
\end{aligned}$$

dvs. vi kan for alle $t = \mathtt{eq}(t_2, t_3)$ lade

$$\begin{aligned}
bt_t(x_1, x_2) = \exists x_3[bt_{t_2}(x_1, x_3) \wedge bt_{t_3}(x_1, x_3) \wedge x_2 = \underline{\Sigma_1}] \vee \\
[\neg\exists x_3[bt_{t_2}(x_1, x_3) \wedge bt_{t_3}(x_1, x_3)] \wedge x_2 = \overline{0}].
\end{aligned}$$

Hermed har vi fået vist eksistensen af $bt_t(x_1, x_2) \in Pr^{(2)}_{FA}$ for alle $t \in T_\Sigma$ som opfylder (2). Vi vil nu på tilsvarende måde vise eksistensen af $br_p(x_1, x_2) \in Pr^{(2)}_{FA}$ for alle $p \in Pr_{\mathtt{while}(\Sigma)}$ som opfylder (1), hvorved beviset er fuldført. Eksistensen af prædikatnavne br_p opfyldende (1) vises ved induktion på længden af p efter samme mønster som vi definerede $\text{ber}_\Sigma(p, f)$ ved induktion på længden af p i Definition 57. Vi har 3 tilfælde (første tilfælde er basistilfældet og sidste 2 tilfælde er induktionsskridt):

(i) Hvis $p = v{:=}t$ gælder for alle $\varphi_1, \varphi_2 \in R$:

$$\begin{aligned}
&\text{ber}_\Sigma(p, r(\varphi_1)) = r(\varphi_2) \\
\Leftrightarrow\ &r(\varphi_2) = \{(v, \text{bet}_\Sigma(t, r(\varphi_1)))\} \cup r(\varphi_1) \restriction (V_{\mathtt{while}} - \{v\}) \\
\Leftrightarrow\ &\text{for alle } v' \in V_{\mathtt{while}} \text{ og } k' \in \Sigma^* \text{ gælder } (v', k') \in r(\varphi_2) \text{ hvis og kun} \\
&\text{hvis der gælder en af følgende:} \\
&\quad \text{(a) } v' \neq v \text{ og } (v', k') \in r(\varphi_1). \\
&\quad \text{(b) } v' = v \text{ og } k' = \text{bet}_\Sigma(t, r(\varphi_1)). \\
\Leftrightarrow\ &\text{for alle } v' \in V_{\mathtt{while}} \text{ og } k' \in \Sigma^* \text{ er } \#v'|k'\# \text{ en delstreng af } \varphi_2 \text{ hvis} \\
&\text{og kun hvis der gælder en af følgende:} \\
&\quad \text{(a) } v' \neq v \text{ og } \#v'|k'\# \text{ er en delstreng af } \varphi_1. \\
&\quad \text{(b) } v' = v \text{ og } k' = \text{bet}_\Sigma(t, r(\varphi_1)). \\
\Leftrightarrow\ &\forall x_3 \forall x_4[\overline{g(V_{\mathtt{while}})}(x_3) \wedge \overline{g(\Sigma^*)}(x_4) \to [\overline{D}(\underline{\#} * x_3 * \underline{|} * x_4 * \underline{\#}, \underline{\varphi_2}) \leftrightarrow \\
&\qquad [[\neg x_3 = \underline{v} \wedge \overline{D}(\underline{\#} * x_3 * \underline{|} * x_4 * \underline{\#}, \underline{\varphi_1})] \vee \\
&\qquad\quad [x_3 = \underline{v} \wedge bt_t(\underline{\varphi_1}, x_4)]]]] \in T_{FA}
\end{aligned}$$

dvs. (1) bliver opfyldt for alle $p = v{:=}t$ hvis vi for disse p lader

$$
\begin{aligned}
&br_p(x_1,x_2) = \forall x_3 \forall x_4[\overline{g(V_{\texttt{while}})}(x_3) \wedge \overline{g(\Sigma^*)}(x_4) \rightarrow \\
&\quad [\overline{D}(\underline{\#} * x_3 * \underline{|} * x_4 * \underline{\#}, x_2) \leftrightarrow \\
&\qquad [[\neg x_3 = \underline{v} \wedge \overline{D}(\underline{\#} * x_3 * \underline{|} * x_4 * \underline{\#}, x_1)] \vee [x_3 = \underline{v} \wedge bt_t(x_1, x_4)]]]]
\end{aligned}
$$

(ii) Hvis $p = p_1;p_2$ gælder

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ber}_\Sigma(p, r(\varphi_1)) = r(\varphi_2) \\
\Leftrightarrow\ & r(\varphi_2) = \mathrm{ber}_\Sigma(p_2, \mathrm{ber}_\Sigma(p_1, r(\varphi_1))) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x_3[br_{p_1}(\underline{\varphi_1}, x_3) \wedge br_{p_2}(x_3, \underline{\varphi_2})] \in T_{FA}
\end{aligned}
$$

idet vi undervejs som induktionsantagelse benytter eksistensen af prædikatnavne br_{p_1} og br_{p_2} opfyldende (1). Ækvivalensen viser at (1) bliver opfyldt for $p = p_1;p_2$ hvis vi for disse p lader

$$br_p(x_1,x_2) = \exists x_3[br_{p_1}(x_1,x_3) \wedge br_{p_2}(x_3,x_2)].$$

(iii) Hvis $p =$ `while` t `do` p_1 `end` gælder

$\mathrm{ber}_\Sigma(p, r(\varphi_1)) = r(\varphi_2)$

$\Leftrightarrow$ der eksisterer en endelig følge $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ med følgende egenskaber

(a) $f_0 = r(\varphi_1)$ og $f_n = r(\varphi_2)$.
(b) $f_{i+1} = \mathrm{ber}_\Sigma(p, f_i)$ for alle $i < n$.
(c) $\mathrm{bet}_\Sigma(t, f_i) \neq ()$ for alle $i < n$.
(d) $\mathrm{bet}_\Sigma(t, f_n) = ()$.

$\Leftrightarrow$ der eksisterer en streng $\alpha \in Q$ med følgende egenskaber

(a) $\#\varphi_1\#$ er et præfiks og $\#\varphi_2\#$ er et suffiks i α.
(b) Hvis $\#\varphi'\varphi''\#$ er en delstreng af α hvor $\varphi', \varphi'' \in R$ gælder $r(\varphi'') = \mathrm{ber}_\Sigma(p, r(\varphi'))$.
(c) Hvis $\#\varphi'\#$ er en delstreng af α som ikke er et suffiks i α og $\varphi' \in R$ gælder $\mathrm{bet}_\Sigma(t, r(\varphi')) \neq ()$.
(d) $\mathrm{bet}_\Sigma(t, r(\varphi_2)) = ()$.

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & \exists x_3[\overline{g(Q)}(x_3) \wedge \overline{P}(\underline{\#\varphi_1\#}, x_3) \wedge \overline{S}(\underline{\#\varphi_2\#}, x_3) \wedge \\
&\quad \forall x_4 \forall x_5[\overline{D}(\underline{\#} * x_4 * x_5 * \underline{\#}, x_3) \wedge \overline{g(R)}(x_4) \wedge \overline{g(R)}(x_5) \rightarrow \\
&\qquad br_{p_1}(x_4, x_5)] \wedge \forall x_4[\overline{D}(\underline{\#} * x_4 * \underline{\#}, x_3) \wedge \neg\overline{S}(\underline{\#} * x_4 * \underline{\#}, x_3) \wedge \\
&\qquad\quad \overline{g(R)}(x_4) \rightarrow \neg bt_t(x_4, \overline{0})] \wedge bt_t(\underline{\varphi_2}, \overline{0})] \in T_{FA}
\end{aligned}
$$

dvs. (1) bliver opfyldt for alle $p = \texttt{while}\ t\ \texttt{do}\ p_1\ \texttt{end}$ hvis vi for disse p lader

$$\begin{aligned}
br_p(x_1,x_2) = \exists x_3[&\overline{g(Q)}(x_3) \wedge \overline{P}(\underline{\#} * x_1 * \underline{\#}, x_3) \wedge \overline{S}(\underline{\#} * x_2 * \underline{\#}, x_3) \wedge \\
&\forall x_4 \forall x_5[\overline{D}(\underline{\#} * x_4 * x_5 * \underline{\#}, x_3) \wedge \overline{g(R)}(x_4) \wedge \overline{g(R)}(x_5) \rightarrow \\
&\quad br_{p_1}(x_4,x_5)] \wedge \forall x_4[\overline{D}(\underline{\#} * x_4 * \underline{\#}, x_3) \wedge \neg\overline{S}(\underline{\#} * x_4 * \underline{\#}, x_3) \wedge \\
&\quad\quad \overline{g(R)}(x_4) \rightarrow \neg bt_t(x_4, \overline{0})] \wedge bt_t(x_2, \overline{0})].
\end{aligned}$$

Dette afslutter beviset. □

Korollar 64. *Hvis $M \subseteq K_{FA}^n$ har navn i* $\texttt{while}(\Sigma)$ *for en $\Sigma \supseteq 0$, da har M navn i FA.*

Bevis Ifølge Teorem 63 har $g_{\Sigma'}(M)$ navn i *FA* for en $\Sigma' \supseteq \Sigma$. Ifølge Lemma 53 har afbildningen $g_{\Sigma'} \restriction K_{FA}$ navn i *FA*. Lader vi på sædvanlig måde $\overline{g_{\Sigma'}(M)}$ betegne et navn for $g_{\Sigma'}(M)$ i *FA* og $\overline{g_{\Sigma'}}$ betegne et navn for $g_{\Sigma'} \restriction K_{FA}$ i *FA* fås for alle $k_1, \ldots, k_n \in K_{FA}$

$$\begin{aligned}
&(k_1, \ldots, k_n) \in M \\
\Leftrightarrow\ &(g_{\Sigma'}(k_1), \ldots, g_{\Sigma'}(k_n)) \in g_{\Sigma'}(M) \\
\Leftrightarrow\ &\overline{g_{\Sigma'}(M)}(g_{\Sigma'}(k_1), \ldots, g_{\Sigma'}(k_n)) \in T_{FA} \\
\Leftrightarrow\ &(k_1, \ldots, k_n) \in E_{FA}\left(\overline{g_{\Sigma'}(M)}(\overline{g_{\Sigma'}}(x_1), \ldots, \overline{g_{\Sigma'}}(x_n))\right)
\end{aligned}$$

hvilket viser det ønskede. □

Lemma 65. *Lad Σ være en endelig følge. Lad $M \subseteq (\Sigma^*)^n$ og antag at $g_{\Sigma'}(M)$ har navn i FA for en $\Sigma' \supseteq \Sigma$. Da har $g_{\Sigma''}(M)$ navn i FA for enhver $\Sigma'' \supseteq \Sigma$.*

Bevis Lad $\Sigma = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m)$, $M \subseteq (\Sigma^*)^n$ og $\Sigma' = (\Sigma'_1, \ldots, \Sigma'_{m'}) \supseteq \Sigma$ være givet så $g_{\Sigma'}(M)$ har navn i *FA*. Lad $\Sigma'' = (\Sigma''_1, \ldots, \Sigma''_{m''}) \supseteq \Sigma$ være valgt vilkårligt. Vi skal vise at $g_{\Sigma''}(M)$ har navn i *FA*. Der gælder for alle $k_1, \ldots, k_n \in K_{FA}$

$$\begin{aligned}
&(k_1, \ldots, k_n) \in g_{\Sigma''}(M) \\
\Leftrightarrow\ &k_1, \ldots, k_n \in \operatorname{ran}(g_{\Sigma''} \restriction \Sigma^*) \text{ og } \left(g_{\Sigma''}^{-1}(k_1), \ldots, g_{\Sigma''}^{-1}(k_n)\right) \in M \\
\Leftrightarrow\ &k_1, \ldots, k_n \in \operatorname{ran}(g_{\Sigma''} \restriction \Sigma^*) \text{ og } \left(g_{\Sigma'} g_{\Sigma''}^{-1}(k_1), \ldots, g_{\Sigma'} g_{\Sigma''}^{-1}(k_n)\right) \in g_{\Sigma'}(M).
\end{aligned}$$

Vi definerer en afbildning $g : K_{FA} \rightarrow K_{FA}$ ved

$$g(k) = \begin{cases} g_{\Sigma'} g_{\Sigma''}^{-1}(k) & \text{hvis } k \in \operatorname{ran}(g_{\Sigma''} \restriction \Sigma^*) \\ m' + 1 & \text{ellers} \end{cases}$$

Værdien $g(k) = m' + 1$ for $k \notin \mathrm{ran}(g_{\Sigma''} \restriction \Sigma^*)$ er valgt for at opnå $g(k) \notin \mathrm{ran}(g_{\Sigma'})$ for disse k. Hermed får vi nemlig for alle $k_1, \dots, k_n \in K_{FA}$

$$\begin{aligned} & k_1, \dots, k_n \in \mathrm{ran}(g_{\Sigma'} \restriction \Sigma^*) \text{ og } \big(g_{\Sigma'} g_{\Sigma''}^{-1}(k_1), \dots, g_{\Sigma'} g_{\Sigma''}(k_n)\big) \in g_{\Sigma'}(M) \\ \Leftrightarrow\ & (g(k_1), \dots, g(k_n)) \in g_{\Sigma'}(M). \end{aligned}$$

I alt har vi da

$$\begin{aligned} & (k_1, \dots, k_n) \in g_{\Sigma''}(M) \\ \Leftrightarrow\ & (g(k_1), \dots, g(k_n)) \in g_{\Sigma'}(M) \\ \Leftrightarrow\ & \overline{g_{\Sigma'}(M)}(g(k_1), \dots, g(k_n)) \in T_{FA} \end{aligned}$$

hvilket viser at $g_{\Sigma''}(M)$ har navn i *FA* hvis afbildningen g kan vises at have navn i *FA*. Vi viser at g har navn i *FA* ved at vise at g har navn i `while`(0) og benytte Korollar 64.

Ifølge Lemma 48 gælder for alle afbildninger h_S (som defineret i Definition 46) hvor $S = (S_1, \dots, S_l)$ er en endelig følge:

$$\begin{aligned} & h_S(\ ()\ ) = 0 \\ & h_S(S_{i_1} \dots S_{i_q}) = h_S(S_{i_1} \dots S_{i_{q-1}})(l+1) + i_q. \end{aligned} \tag{20}$$

Lad $k = h_S(S_{i_1} \dots S_{i_q}) \in \mathrm{ran}(h_S) - \{0\}$. Da gælder ifølge (20):

$$k \operatorname{div}(l+1) = h_S(S_{i_1} \dots S_{i_{q-1}})$$

hvor $x \operatorname{div} y$ for alle $x \in \mathbb{N}$ og $y \in \mathbb{N} - \{0\}$ betegner det største $z \in \mathbb{N}$ så $y \cdot z < x$ (heltalsdivision). Desuden gælder

$$k \bmod (l+1) = i_q$$

hvor $x \bmod y$ for alle $x \in \mathbb{N}$ og $y \in \mathbb{N} - \{0\}$ betegner $x - y \cdot (x \operatorname{div} y)$ (rest ved heltalsdivision). Vi får derfor

$$\begin{aligned} h_S^{-1}(k) &= S_{i_1} \dots S_{i_q} \\ &= h_S^{-1}(h_S(S_{i_1} \dots S_{i_{q-1}}))S_{i_q} \\ &= h_S^{-1}(k \operatorname{div}(l+1))S_{k \bmod (l+1)}. \end{aligned}$$

Afbildningen $h_S^{-1} : \mathrm{ran}(h_S) \to S^*$ ses hermed at kunne angives ved følgende rekursive udtryk

$$\begin{aligned} & h_S^{-1}(0) = () \\ & h_S^{-1}(k) = h_S^{-1}(k \operatorname{div}(l+1))S_{k \bmod (l+1)}. \end{aligned} \tag{21}$$

Lad som tidligere $i : \mathbb{N} \to K_{FA}$ være den bijektive afbildning givet ved $i(n) = \overline{n}$. For alle $\overline{k} \in \mathrm{ran}(g_{\Sigma''} \restriction \Sigma^*)$ gælder

$$\begin{aligned} g(\overline{k}) &= g_{\Sigma'} g_{\Sigma''}^{-1}(\overline{k}) \\ &= i h_{\Sigma'} h_{\Sigma''}^{-1} i^{-1}(\overline{k}) \\ &= \overline{h_{\Sigma'} h_{\Sigma''}^{-1}(k)} \end{aligned}$$

hvor $h_{\Sigma'} h_{\Sigma''}^{-1}(k)$ udfra (20) og (21) kan angives ved følgende rekursive udtryk

$$\begin{aligned} h_{\Sigma'} h_{\Sigma''}^{-1}(0) &= 0 \\ h_{\Sigma'} h_{\Sigma''}^{-1}(k) &= h_{\Sigma'}\left(h_{\Sigma''}^{-1}\left(k \operatorname{div}(m''+1)\right) \Sigma''_{k \bmod (m''+1)}\right) \\ &= h_{\Sigma'} h_{\Sigma''}^{-1}(k \operatorname{div}(m''+1)) + h_{\Sigma'}(\Sigma''_{k \bmod (m''+1)}). \end{aligned} \tag{22}$$

Konstruktionen af et navn for g i `while`(0) deles op i trin ved at benytte "subprocedurer". Lad `plus` være følgende 2-plads prædikatnavn i `while`(0):

```
y := nlast(conc(x1, x2)).
```

Det ses at `plus` givet input $(\overline{k}_1, \overline{k}_2) \in K_{FA}^2$ beregner output $\overline{k_1 + k_2} \in K_{FA}$. Tilsvarende kan vi definere et 2-plads prædikatnavn `minus` ved

```
while nlast(x2) do        (sålænge x2 ikke betegner 0: )
   x1 := nlast(x1);
   x2 := nlast(x2)
end;
y := x1
```

som givet input $(\overline{k}_1, \overline{k}_2) \in K_{FA}^2$ vil beregne output $\overline{k_1 - k_2}$ hvis $k_1 \geq k_2$ og output () hvis $k_1 < k_2$. Udfra `plus` og `minus` kan vi nu definere et 2-plads prædikatnavn `mult` som givet input $(\overline{k}_1, \overline{k}_2) \in K_{FA}$ beregner output $\overline{k_1 \cdot k_2}$:

```
y := 0
while nlast(x1) do
   y := plus(y, x2);
   x1 := minus(x1,1̄)
end.
```

Følgende 2-plads prædikatnavn `div` vil givet input $(\overline{k}_1, \overline{k}_2) \in K_{FA} \times (K_{FA} - \{0\})$ beregne output $\overline{k_1 \operatorname{div} k_2}$:

```
y := ();
while x1 do
   x1 := minus(x1, x2);
   y := conc(y,0)
end
```

—og følgende prædikatnavn `mod` vil givet input $(\overline{k}_1, \overline{k}_2) \in K_{FA} \times (K_{FA} - \{0\})$ beregne output $\overline{k_1 \bmod k_2} = \overline{k_1 - k_2 \cdot (k_1 \operatorname{div} k_2)}$:

$$
\begin{array}{l}
\mathtt{y} := \mathtt{div}(\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2); \\
\mathtt{y} := \mathtt{mult}(\mathtt{x}_2, \mathtt{y}); \\
\mathtt{y} := \mathtt{minus}(\mathtt{x}_1, \mathtt{y}).
\end{array}
$$

Ved at benytte det rekursive udtryk for $h_{\Sigma'} h_{\Sigma''}^{-1}$ i (22) kan vi nu konstruere et navn for g i `while`(0). Bemærk at (22) kan videreskrives til

$$
\begin{aligned}
h_{\Sigma'} h_{\Sigma''}^{-1}(k) = {} & h_{\Sigma'} h_{\Sigma''}^{-1} \big((k \operatorname{div}(m''+1)) \operatorname{div}(m''+1)\big)\,(m'+1)^2 + \\
& h_{\Sigma'}\left(\Sigma''_{(k \operatorname{div}(m''+1)) \bmod (m''+1)}\right)(m'+1) + h_{\Sigma'}\left(\Sigma''_{k \bmod (m''+1)}\right).
\end{aligned}
$$

Vi angiver herunder et navn for g i `while`(0) efterfulgt af kommentarer til programmmet. Til venstre er noteret linienumre.

$$
\begin{array}{rl}
1 & \mathtt{y} := 0; \\
2 & \mathtt{z}_2 := \overline{1}; \\
3 & \mathtt{while}\ \mathtt{nlast}(\mathtt{x}_1)\ \mathtt{do} \\
4 & \quad \mathtt{z}_1 := \mathtt{mod}(\mathtt{x}_1, \overline{m''+1}); \\
5 & \quad \mathtt{if}\ \mathtt{eq}(\mathtt{z}_1, g_{\Sigma''}(\Sigma_1))\ \mathtt{then}\ \mathtt{z}_1 := g_{\Sigma'}(\Sigma_1) \\
6 & \qquad \mathtt{else}\ \mathtt{if}\ \mathtt{eq}(\mathtt{z}_1, g_{\Sigma''}(\Sigma_2))\ \mathtt{then}\ \mathtt{z}_1 := g_{\Sigma'}(\Sigma_2) \\
\ldots & \qquad\quad \ldots \\
m+4 & \qquad\qquad \mathtt{else}\ \mathtt{if}\ \mathtt{eq}(\mathtt{z}_1, g_{\Sigma''}(\Sigma_m))\ \mathtt{then}\ \mathtt{z}_1 := g_{\Sigma'}(\Sigma_m) \\
m+5 & \qquad\qquad\quad \mathtt{else}\ \mathtt{y} := \overline{m'+1}; \mathtt{z}_1 := 0; \mathtt{x}_1 := 0\ \mathtt{end} \\
m+6 & \qquad\qquad \mathtt{end} \\
\ldots & \qquad\quad \ldots \\
2m+4 & \qquad \mathtt{end} \\
2m+5 & \quad \mathtt{end}; \\
2m+6 & \quad \mathtt{z}_1 := \mathtt{mult}(\mathtt{z}_1, \mathtt{z}_2); \\
2m+7 & \quad \mathtt{y} := \mathtt{plus}(\mathtt{y}, \mathtt{z}_1); \\
2m+8 & \quad \mathtt{z}_2 := \mathtt{mult}(\mathtt{z}_2, \overline{m'+1}); \\
2m+9 & \quad \mathtt{x}_1 := \mathtt{div}(\mathtt{x}_1, \overline{m''+1}) \\
2m+10 & \mathtt{end}.
\end{array}
$$

I linie 4 lader vi $\mathtt{z}_1$ betegne $\overline{k \bmod (m''+1)}$ hvor $\overline{k}$ er strengen $\mathtt{x}_1$, inputvariablen, betegner. Linierne 5 til $m+4$ sørger for at $\mathtt{z}_1$ kommer til at betegne $h_{\Sigma'}\left(\Sigma''_{k \bmod (m''+1)}\right)$, medmindre det viser sig at input ikke er med i $\operatorname{ran}(g_{\Sigma'} \restriction \Sigma^*)$, i hvilket tilfælde linie $m+5$ gør programmet klar til at give output $\overline{m'+1}$.

Med ovenstående program er beviset fuldført. □

På basis af det netop viste lemma kan vi, når vi skal diskutere hvorvidt mængden af Gödel-numre af en mængde M har navn i FA, blot skrive $g(M)$, hvor det da er underforstået at diskussionen gælder for alle $g = g_\Sigma$ hvor Σ

indeholder alle symboler som forekommer i M (eller alle de symboler som af konteksten ses at være nødvendige). Teorem 63 kan hermed gives følgende simplificerede form.

Korollar 66. *Hvis $M \subseteq (\Sigma^*)^n$ har navn i* $\texttt{while}(\Sigma)$ *da har $g(M)$ navn i FA.*

Som et simpelt korollar af dette har vi

Korollar 67. *Hvis M er rekursiv har $g(M)$ navn i FA.*

Bevis Hvis M er rekursiv gælder $M \subseteq (\Sigma^*)^n$ for en endelig følge Σ og der eksisterer et prædikatnavn $p \in Pr^{(n+1)}_{\texttt{while}(\Sigma)}$ så

$$M = \left\{(k_1, \dots, k_n) \mid (k_1, \dots, k_n, \Sigma_1) \in E_{\texttt{while}(\Sigma)}(p)\right\}.$$

Ifølge ovenstående teorem har $g(E_{\texttt{while}(\Sigma)}(p))$ et navn Π i *FA*. Der gælder nu

$$\begin{aligned} g(M) &= \left\{(g(k_1), \dots, g(k_n)) \mid (k_1, \dots, k_n, \Sigma_1) \in E_{\texttt{while}(\Sigma)}(p)\right\} \\ &= \left\{(g(k_1), \dots, g(k_n)) \mid (g(k_1), \dots, g(k_n), g(\Sigma_1)) \in g(E_{\texttt{while}(\Sigma)}(p))\right\} \end{aligned}$$

dvs. vi har for alle $l_1, \dots, l_n \in K_{FA}$

$$\begin{aligned} & (l_1, \dots, l_n) \in g(M) \\ \Leftrightarrow\ & (l_1, \dots, l_n, g(\Sigma_1)) \in g(E_{\texttt{while}(\Sigma)}(p)) \\ \Leftrightarrow\ & \Pi(l_1, \dots, l_n, \underline{\Sigma_1}) \in T_{FA} \end{aligned}$$

hvilket viser at $g(M)$ har navn i *FA*. $\square$

Definition 68. *Lad φ være et formelt system. φ kaldes **fuldstændigt** hvis alle sande sætninger i systemet er bevisbare, dvs. hvis $T_{\sigma(\varphi)} = \mathrm{ran}(B(\varphi))$, og ellers **ufuldstændigt**. En sand sætning som ikke kan bevises, dvs. en sætning i $T_{\sigma(\varphi)} - \mathrm{ran}(B(\varphi))$, kaldes en **uafgørbar** sætning.*

Teorem 69 (Gödels Ufuldstændighedsteorem). *FA udstyret med en vilkårlig realistisk bevisrelation er ufuldstændigt.*

Bevis Lad φ være et formelt system med $\sigma(\varphi) = FA$ og realistisk bevisrelation $B(\varphi)$. Da $B(\varphi)$ er realistisk er den rekursiv og dermed har $g(B(\varphi))$ navn i *FA* ifølge ovenstående korollar. Nu fås for alle $k_1 \in K_{FA}$

$$\begin{aligned} & k_1 \in g(\mathrm{ran}(B(\varphi))) \\ \Leftrightarrow\ & \text{der eksisterer } k_2 \in K_{FA} \text{ så } (k_2, k_1) \in g(B(\varphi)) \\ \Leftrightarrow\ & \exists x_2[\overline{g(B(\varphi))}(x_2, k_1)] \in T_{FA} \end{aligned}$$

hvilket viser at $g(\mathrm{ran}(B(\varphi)))$ har navn i FA. Samtidig viser Teorem 54 at $g(T_{FA})$ *ikke* har navn i FA, og derfor må gælde $\mathrm{ran}(B(\varphi)) \neq T_{FA} = T_{\sigma(\varphi)}$.
$\square$

Bemærkninger og referencer Alle tekniske detaljer i ovenstående er mine egne. Lemma 65 er helt mit eget resultat, da man i de sædvanlige, lidt mindre generelle, fremstillinger kan klare sig med én fast Gödel-kodning, hvorfor resultatet i disse fremstillinger slet ikke kommer på tale.

8.2 Generalisering af ufuldstændighedsteoremet

Vi ønsker i dette afsnit at vise at ufuldsændighed ikke kun opstår i *FA* udstyret med en realistisk bevisrelation, men i en meget omfattende klasse af formelle systemer.

Ethvert formelt system φ indeholder to formelle semantikker: dels semantikken for det formelle sprog $\sigma(\varphi)$ og dels en af bevisrelationen $B(\varphi)$ induceret semantik. Den sidstnævnte semantik opstår som den formelle semantik for sproget $\beta(\varphi)$ defineret på følgende måde:

Definition 70. *Lad φ være et formelt system.* ***Bevissproget*** *hørende til φ, $\beta(\varphi)$, defineres som sproget med samme formelle syntaks som $\sigma(\varphi)$ og formel semantik givet ved*

$$T_{\beta(\varphi)} = \operatorname{ran}(B(\varphi))$$
$$F_{\beta(\varphi)} = S_{\beta(\varphi)} - T_{\beta(\varphi)}.$$

Med ovenstående definition er det klart at et formelt system φ er fuldstændigt hvis og kun hvis $T_{\beta(\varphi)} = T_{\sigma(\varphi)}$. Når skal vise ufuldstændigheden af et formelt system φ er målet altså at vise at semantikkerne for de to sprog $\beta(\varphi)$ og $\sigma(\varphi)$ er forskellige. Med henblik på at opnå en generalisering af Gödels Ufuldstændighedsteorem (Teorem 69) ser vi nærmere på det forhold som består imellem sprogene $\beta(\varphi)$ og $\sigma(\varphi)$ for forskellige typer af formelle systemer φ.

I Eksempel 59 viste vi at o_{FA} har navn i $\texttt{while}(\Sigma_{FA})$. Det betyder at der eksisterer en mekanisk måde hvorpå vi udfra et prædikatnavn $p \in Pr^{(1)}_{FA}$ og et konstantnavn $k \in K_{FA}$ kan konstruere sætningen $p(k) \in S_{FA}$, som tillægger tingen k betegner den egenskab p betegner. Det synes at være et naturligt krav til ethvert "fornuftigt" formelt sprog at der eksisterer en mekanisk måde hvorpå vi udfra ethvert konstantnavn k og ethvert 1-plads prædikatnavn p kan danne sætningen $p(k)$. Vi indfører derfor følgende definition.

Definition 71. *Et formelt sprog σ kaldes* ***realistisk*** *hvis $o_\sigma = O_\sigma \restriction Pr^{(1)}_\sigma$ har navn i $\texttt{while}(\Sigma_\sigma)$. Et formelt system φ kaldes* ***realistisk*** *hvis $\sigma(\varphi)$ er et realistisk formelt sprog og $B(\varphi)$ er en realistisk bevisrelation.*

Lemma 72. *Hvis φ er et realistisk formelt system med $K_{\sigma(\varphi)} \supseteq K_{FA}$ gælder*

$$\overline{\Delta}_{E_{\beta(\varphi)} \circ g^{-1} \restriction g(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)})} \in \operatorname{ran}(E_{FA}) - \operatorname{ran}(E_{\beta(\varphi)}),$$

dvs. den pågældende antidiagonal har navn i FA men ikke i $\beta(\varphi)$.

Bevis Lad $I = E_{\beta(\varphi)} \circ g^{-1} \restriction g(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)})$. Da $\operatorname{ran}(I) = E_{\beta(\varphi)}(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)})$ har $\overline{\Delta}_I$ ikke navn i $\beta(\varphi)$ ifølge det specialiserede diagonalargument, Lemma 21. Ifølge beviset for Lemma 45 gælder

$$\overline{\Delta}_I = d^{-1}_{\beta(\varphi)}(o^{-1}_{\beta(\varphi),g}(\complement g(T_{\beta(\varphi)}))).$$

Da φ er realistisk har $g(T_{\beta(\varphi)}) = g(\mathrm{ran}(B(\varphi)))$ navn i *FA* ifølge beviset for Teorem 69. For at vise at $\overline{\Delta}_I$ har navn i *FA* er det derfor nok at vise at *FA* er lukket under komplementering og afbildningen

$$d^{-1}_{\beta(\varphi)} o^{-1}_{\beta(\varphi),g} : \mathcal{P}(g(S_{\beta(\varphi)})) \to \mathcal{P}(g(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)})).$$

Lukkethed under komplementering er triviel og blev vist i beviset for Teorem 54. Da φ er realistisk har $o_{\beta(\varphi)} = o_{\sigma(\varphi)}$ navn i $\texttt{while}(\Sigma_\sigma)$, og dermed har

$$g(o_{\beta(\varphi)}) : g(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)}) \times g(K_{\beta(\varphi)}) \to g(S_{\beta(\varphi)})$$

navn i *FA* (Korollar 66). For at vise lukkethed under $d^{-1}_{\beta(\varphi)} o^{-1}_{\beta(\varphi),g}$ lader vi $M \in \mathcal{P}(g(S_{\beta(\varphi)}))$ med navn $\overline{M}(x_1)$ i *FA*. Vi skal da vise at

$$d^{-1}_{\beta(\varphi)} o^{-1}_{\beta(\varphi),g}(M) = \left\{ l \in g(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)}) \mid o_{\beta(\varphi),g}(l,l) \in M \right\}$$

ligeledes har navn i *FA*. For alle $k \in K_{FA}$ gælder

$$\begin{aligned}
&k \in E_{FA}\left(\overline{M}(\overline{g(o_{\sigma(\varphi)})}(x_1, \overline{g}(x_1)))\right) \\
\Leftrightarrow\ &(k, g(k)) \in \mathrm{dom}(g(o_{\beta(\varphi)})) \text{ og } g(o_{\beta(\varphi)})(k, g(k)) \in M \\
\Leftrightarrow\ &k \in g(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)}) \text{ og } g(o_{\beta(\varphi)})(k, g(k)) \in M \\
\Leftrightarrow\ &k \in g(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)}) \text{ og } g(o_{\beta(\varphi)}(g^{-1}(k), k)) \in M \\
\Leftrightarrow\ &k \in g(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)}) \text{ og } o_{\beta(\varphi),g}(k, k) \in M \\
\Leftrightarrow\ &k \in \left\{ l \in g(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)}) \mid o_{\beta(\varphi),g}(l,l) \in M \right\} \\
\Leftrightarrow\ &k \in d^{-1}_{\beta(\varphi)} o^{-1}_{\beta(\varphi),g}(M)
\end{aligned}$$

hvilket viser det ønskede. $\square$

FA er et formelt sprog for aritmetik. Det betyder at alle rent aritmetiske udsagn kan udtrykkes i *FA*. Der findes mange andre formelle sprog hvori alle aritmetiske udsagn kan udtrykkes. Dette gælder blandt andet det formelle sprog ZF, Zermelo-Fraenkels mængdelære, som på naturlig måde omfatter aritmetikken. Man kan også forestille sig forskellige flertypede sprog omfattende aritmetikken og eventuelt samtidig andre dele af matematikken. For alle disse sprog gælder et fælles ufuldstændighedsresultat i stil med Gödels Ufuldstændighedsteorem. Før vi kan formulere og bevise dette generaliserede ufuldstændighedsresultat må vi præcisere hvad vi vil forstå ved at et formelt system "omfatter" aritmetikken.

Definition 73. *Et formelt sprog σ siges at* ***omfatte aritmetikken*** *hvis $K_\sigma \supseteq K_{FA}$ og alle mængder som har navne i FA også har navne i σ, dvs. hvis*

$$\mathrm{ran}(E_\sigma) \supseteq \mathrm{ran}(E_{FA}).$$

Et formelt system φ siges at ***omfatte aritmetikken*** *hvis $\sigma(\varphi)$ omfatter aritmetikken.*

Hvis et formelt sprog σ ikke opfylder kravet i ovenstående definition vil der eksistere mindst ét prædikatnavn p i FA hvis ekstension ikke har navn i σ, dvs. den aritmetiske egenskab eller relation som p betegner i sproget FA, mængden $E_{FA}(p)$, kan ikke udtrykkes i σ. Derfor giver det i dette tilfælde mening at sige at σ ikke omfatter (hele) aritmetikken. Vi er nu klar til at formulere og bevise vores generelle ufuldstændighedsresultat.

Teorem 74 (Generel Ufuldstændighed). *Ethvert realistisk formelt system omfattende aritmetikken er ufuldstændigt.*

Bevis Lad φ være et realistisk formelt system omfattende aritmetikken. Da gælder ifølge Lemma 72

$$\overline{\Delta}_{E_{\beta(\varphi)} \circ g^{-1} \restriction g(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)})} \in \mathrm{ran}(E_{FA}) - \mathrm{ran}(E_{\beta(\varphi)})$$

og idet φ omfatter aritmetikken gælder så

$$\overline{\Delta}_{E_{\beta(\varphi)} \circ g^{-1} \restriction g(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)})} \in \mathrm{ran}(E_{\sigma(\varphi)}) - \mathrm{ran}(E_{\beta(\varphi)})$$

dvs. $\mathrm{ran}(E_{\sigma(\varphi)}) \neq \mathrm{ran}(E_{\beta(\varphi)})$. Hermed fås $T_{\sigma(\varphi)} \neq T_{\beta(\varphi)} = \mathrm{ran}(B(\varphi))$. $\square$

Ufuldstændigheden af de formelle systemer φ opnås i ovenstående bevis ved at vise at mængden

$$\overline{\Delta}_{E_{\beta(\varphi)} \circ g^{-1} \restriction g(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)})}$$

har navn i sproget $\sigma(\varphi)$ men ikke i sproget $\beta(\varphi)$. Dermed kan de to sprog ikke være identiske, dvs. sandhed og bevisbarhed i φ er ikke sammenfaldende. Lad φ være et realistisk formelt system omfattende aritmetikken. Lad $I = E_{\beta(\varphi) \circ g^{-1} \restriction g(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)})}$. Ifølge ovenstående bevis har $\overline{\Delta}_I$ et navn $\overline{\overline{\Delta}_I}$ i $\sigma(\varphi)$. Der gælder da for alle $k \in K_{\sigma(\varphi)}$

$$\begin{aligned} & O_{\sigma(\varphi)}(\overline{\overline{\Delta}_I}, k) \in T_{\sigma(\varphi)} \\ \Leftrightarrow\ & k \in \mathrm{dom}(I) \text{ og } k \notin I(k) \\ \Leftrightarrow\ & k \in g(Pr_{\beta(\varphi)}) \text{ og } k \notin E_{\beta(\varphi)}(g^{-1}(k)) \\ \Leftrightarrow\ & k \in g(Pr_{\beta(\varphi)}) \text{ og } O_{\sigma(\varphi)}(g^{-1}(k), k) \notin T_{\beta(\varphi)}. \end{aligned}$$

Indsætter vi $k = g(\overline{\overline{\Delta}_I})$ i denne ækvivalens fås

$$\begin{aligned} & O_{\sigma(\varphi)}(\overline{\overline{\Delta}_I}, g(\overline{\overline{\Delta}_I})) \in T_{\sigma(\varphi)} \\ \Leftrightarrow\ & O_{\sigma(\varphi)}(\overline{\overline{\Delta}_I}, g(\overline{\overline{\Delta}_I})) \notin T_{\beta(\varphi)}, \end{aligned}$$

dvs. sætningen $O_{\sigma(\varphi)}(\overline{\overline{\Delta}_I}, g(\overline{\overline{\Delta}_I}))$ er sand hvis og kun hvis den ikke er bevisbar, og må derfor være en uafgørbar sætning i φ. Vi har således for ethvert realistisk formelt system φ omfattende aritmetikken fået udpeget en uafgørbar sætning som demonstrerer φ's ufuldstændighed. Hvis φ er *FA* udstyret med en konkret realistisk bevisrelation kan vi eksplicit opskrive et udtryk for $O_{FA}(\overline{\overline{\Delta}_I}, g(\overline{\overline{\Delta}_I})) = \overline{\Delta}_I(g(\overline{\overline{\Delta}_I}))$, idet hele rækken af beviser som fører fra `while`-programmet for bevisrelationen $B(\varphi)$ til et navn for $\overline{\Delta}_I$ i *FA* er udført konstruktivt.

Vi vil prøve nærmere at forstå hvad der skaber ufuldstændigheden. Hertil beviser vi følgende resultat.

Lemma 75. *Lad φ være et realistisk formelt system med $K_{\sigma(\varphi)} \supseteq K_{FA}$. Enhver mængde $M \subseteq K_{FA}$ som har navn i $\beta(\varphi)$ har ligeledes navn i FA, dvs.*

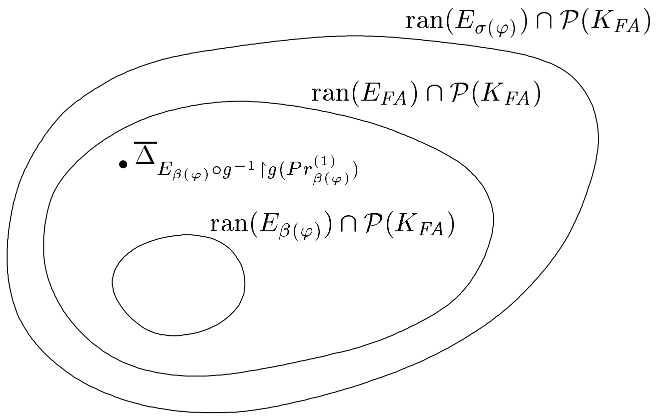
$$\operatorname{ran}(E_{\beta(\varphi)}) \cap \mathcal{P}(K_{FA}) \subseteq \operatorname{ran}(E_{FA}).$$

Bevis Lad $p \in Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)}$ med $E_{\beta(\varphi)}(p) \subseteq K_{FA}$. Vi skal vise at $E_{\beta(\varphi)}(p)$ da har navn i *FA*. Da φ er realistisk har både mængden $g(T_{\beta(\varphi)})$ og afbildningen $g(o_{\beta(\varphi)})$ navne i *FA*. Der gælder nu for alle $k \in K_{FA}$

$$\begin{aligned}
& k \in E_{FA}\left(\overline{g(T_{\beta(\varphi)})}\left(\overline{g(o_{\beta(\varphi)})}\,(g(p), \overline{g}(x_1))\right)\right) \\
\Leftrightarrow\ & g(o_{\beta(\varphi)})(g(p), g(k)) \in g(T_{\beta(\varphi)}) \\
\Leftrightarrow\ & o_{\beta(\varphi)}(p, k) \in T_{\beta(\varphi)} \\
\Leftrightarrow\ & k \in E_{\beta(\varphi)}(p)
\end{aligned}$$

som viser at $E_{\beta(\varphi)}(p)$ har navn i *FA*. $\Box$

Det netop viste lemma giver sammen med Lemma 72 og Definition 73 at vi for ethvert realistisk formelt system φ omfattende aritmetikken har følgende billede:



Af figuren ses det at

$$\operatorname{ran}(E_{\beta(\varphi)}) \cap \mathcal{P}(K_{FA}) \subseteq \operatorname{ran}(E_{\sigma(\varphi)}) \cap \mathcal{P}(K_{FA})$$

dvs. enhver egenskab ved de naturlige tal som kan udtrykkes i $\beta(\varphi)$ kan også udtrykkes i *FA*. Desuden demonstrerer mængden $\overline{\Delta}_{E_{\beta(\varphi)}\circ g^{-1}\upharpoonright g(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)})}$ at der er egenskaber ved de naturlige tal som kan udtrykkes i *FA* men ikke i $\beta(\varphi)$. Semantikken for *FA* er således i denne forstand mere kompliceret end semantikken for $\beta(\varphi)$, dvs. sandhed i *FA* er mere kompliceret end hvad der kan indfanges af bevisbarhed—i hvert fald i det tilfælde hvor bevisbarhed er begrænset ved kravet om eksistens af en algoritme til at afgøre hvorvidt noget er et bevis. Hvis et formelt system φ omfatter aritmetikken vil sandhed i φ være mindst lige så kompliceret som i *FA*, og derved vil sandhed i φ være mere kompliceret end bevisbarhed i φ, hvilket er kernen i ufuldstændigheden.

Beviset for ufuldstændigheden er parallelt til Cantors bevis for overtælleligheden af mængden af uendelige følger M på mængden $\{m, w\}$: I Cantors bevis vises det at mængden

$$M - \{E_1, E_2, \ldots\} \tag{23}$$

er ikke-tom for enhver tællelig følge $(E_1, E_2, \ldots)$ af elementer fra M ved at konstruere en antidiagonal i mængden $M - \{E_1, E_2, \ldots\}$; og i det generelle ufuldstændigsresultat vises det at mængden

$$\operatorname{ran}(E_{\sigma(\varphi)}) \cap \mathcal{P}(K_{FA}) - \operatorname{ran}(E_{\beta(\varphi)}) \cap \mathcal{P}(K_{FA}) \tag{24}$$

er ikke-tom ved at konstruere en antidiagonal i denne mængde. I begge tilfælde er det ønskede vist når de respektive mængder, (23) og (24), er vist at være ikke-tomme. Vi vil nu bevise et resultat som viser at metoden med at konstruere en antidiagonal i en vis forstand er en universel metode når vi vil bevise resultater af denne type. Vi får brug for følgende definition.

Definition 76. *En mængde $X \subseteq \mathcal{P}(B)$ siges at være* ***lukket under endelige ændringer på*** *B hvis der for alle $x, y \in \mathcal{P}(B)$ hvor $x \in X$ og $x \ominus y$ er en endelig mængde gælder $y \in X$.*

Eksempel 77. Vi vil i dette eksempel vise at $E_{FA}(Pr^{(1)}_{FA})$ er lukket under endelige ændringer på K_{FA}. Lad hertil $P, Q \in \mathcal{P}(K_{FA})$ med $P \in E_{FA}(Pr^{(1)}_{FA})$ og $P \ominus Q$ endelig. Lad $\overline{P}$ være et navn for P i *FA*. Da $P \ominus Q$ er endelig kan Q skrives på formen

$$Q = (P \cup \{a_1, \ldots, a_n\}) - \{b_1, \ldots, b_m\}$$

for et valg af $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in K_{FA}$. Vi får derfor for alle $k \in K_{FA}$

$$\begin{aligned}
& k \in Q \\
\Leftrightarrow\ & k \in (P \cup \{a_1, \ldots, a_n\}) - \{b_1, \ldots, b_m\} \\
\Leftrightarrow\ & [\overline{P}(k) \vee k = a_1 \vee \cdots \vee k = a_n] \wedge \neg[k = b_1 \vee \cdots \vee k = b_m] \in T_{FA}
\end{aligned}$$

hvilket viser at Q har navn i FA, dvs. $Q \in E_{FA}(Pr^{(1)}_{FA})$, som ønsket.

Teorem 78. *Lad B være en tællelig mængde. Lad, som i Lemma 4, $A \subseteq B$ og $I : A \to \mathcal{P}(B)$. Hvis $I(A)$ er lukket under endelige ændringer på B er følgende betingelser ækvivalente for enhver $V \in \mathcal{P}(B)$*

(i) $V \notin I(A)$

(ii) *For enhver velordning $(B, \prec)$ af B af type*[12] $\mathbb{N}$ *gælder at afbildningen $f : A \to B$ givet ved*

$$f(x) = \min_{\prec}((V \ominus I(x)) - \{f(y) \mid y \prec x\})$$

er veldefineret og bijektiv og $V = \overline{\Delta}_{I \circ f^{-1}}$.

(iii) *Der eksisterer en afbildning $J : B \to \mathcal{P}(B)$ med* $\mathrm{ran}(J) = \mathrm{ran}(I)$ *og $V = \overline{\Delta}_J$.*

Bevis (i) $\Rightarrow$ (ii): Lad $b : B \to \mathbb{N}$ være en vilkårlig isomorfi af $(B, \prec)$ på $(\mathbb{N}, <)$. Vi må først vise at f givet ved ovenstående rekursive udtryk er entydigt veldefineret. Entydigheden følger umiddelbart af det generelle princip for definition ved transfinit rekursion i ZF (se [Kun80]). Da $V \notin I(A)$ og $I(A)$ er lukket under endelige ændringer, må $V \ominus I(x)$ være uendelig for alle $x \in A$. Vi viser at for alle $x \in A$ findes der en værdi $f(x) \in B$ så

$$f(x) = \min_{\prec}((A \ominus I(x)) - \{f(y) \mid y \prec x\})$$

ved indirekte bevisførsel. Antager vi at en sådan værdi $f(x)$ ikke eksisterer for alle $x \in A$ må der være et mindste element $x_0 \in A$ så ingen værdi $f(x_0)$ opfylder udtrykket. Det vil sige et $x_0 \in A$ så

$$\min_{\prec}((V \ominus I(x_0)) - \{f(y) \mid y \prec x_0\})$$

ikke er veldefineret, altså et x_0 så

$$(V \ominus I(x_0)) - \{f(y) \mid y \prec x_0\}$$

er tom. Men da $V \ominus I(x_0)$ er uendelig og $\{f(y) \mid y \prec x_0\}$ er en mængde med højst $b(x_0)$ elementer, giver dette en modstrid.

Da f således er vist at være veldefineret, fortsætter vi med at vise at f er bijektiv. Injektiviteten er triviel, da der for alle $x \in A$ gælder

$$f(x) \in ((V \ominus I(x)) - \{f(y) \mid y \prec x\})$$

og hermed

$$f(x) \notin \{f(y) \mid y \prec x\}$$

dvs. for alle $x \in A$ er $f(x) \neq f(y)$ hvis $y \prec x$. For at bevise surjektiviteten antager vi eksistensen af en $y' \in B - f(A)$. Da vil gælde

[12] En velordning $(M, \prec)$'s type er det entydige ordinaltal α som gør $(M, \prec)$ isomorf med $(\alpha, <) = (\alpha, \in)$.

Påstand 1. *Der er uendelig mange $x \in A$ for hvilke $y' \in I(x)$.*

Bevis Da B er tællelig eksisterer der en bijektion $p : \mathbb{N} \to (B - \{y'\})$. Definér en afbildning $q : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(B)$ rekursivt ved

$$q(0) = I(0) \cup \{y'\}$$

og

$$q(n+1) = \begin{cases} q(n) \cup \{p(n)\} & \text{hvis } p(n) \notin q(n) \\ q(n) - \{p(n)\} & \text{hvis } p(n) \in q(n) \end{cases}$$

Af disse definitioner ses det let at q har følgende egenskaber

(a) $y' \in q(i)$ for alle $i \in \mathbb{N}$

(idet $y' \in q(0)$ og $y' \notin \operatorname{ran}(p)$)

(b) $q(i) \neq q(j)$ hvis $i \neq j$

(idet p er injektiv gælder for alle $n \in \mathbb{N}$: hvis $p(n) \in q(n)$ så $p(n) \notin q(n+m)$ for alle $m > 0$, og hvis $p(n) \notin q(n)$ så $p(n) \in q(n+m)$ for alle $m > 0$)

(c) $q(i) \ominus I(0)$ er endelig for alle $i \in \mathbb{N}$

(idet $q(0) \ominus I(0) = \{y'\}$ er endelig og fordi $q(n)$ og $q(n+1)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ kun afviger med ét element, $p(n)$)

Af (c) følger det at $q(i) \in I(A)$ for alle $i \in \mathbb{N}$, da $I(A)$ er lukket under endelige ændringer på B. Da vi samtidigt ifølge (b) har at alle $q(i)$ er forskellige og ifølge (a) at de alle indeholder y' er det ønskede hermed vist. □

Påstand 2. *Der er uendelig mange $x \in A$ for hvilke $y' \notin I(x)$.*

Bevis Som ovenfor, men lad istedet $q(0) = I(0) - \{y'\}$. Dermed bliver alle $q(i)$ forskellige mængder i $I(A)$, hvoraf ingen indeholder y'. □

Hvis $y' \notin V$ gælder for alle $x \in A$

$$y' \in V \ominus I(x) \Leftrightarrow y' \in I(x).$$

I dette tilfælde viser Påstand 1 derfor at der er uendeligt mange $x \in A$ for hvilke $y' \in V \ominus I(x)$. Hvis der omvendt gælder $y' \in V$ får vi modsat for alle $x \in A$

$$y' \in V \ominus I(x) \Leftrightarrow y' \notin I(x)$$

hvorved Påstand 2 ses at vise eksistensen af uendeligt mange $x \in A$ for hvilke $y' \in V \ominus I(x)$. Uanset om $y' \in V$ eller ej har vi således vist at der er uendeligt mange $x \in A$ for hvilke $y' \in V \ominus I(x)$. Da $y' \notin f(A)$ må der som f

er defineret gælde $f(x) \prec y'$ for alle disse uendeligt mange $x \in A$. Men hvis f afbilder uendeligt mange $x \in A$ ind på den endelige mængde $\{y \mid y \prec y'\}$ kan f ikke være injektiv, modstrid.

Vi kan nu vise at $V = \overline{\Delta}_{I \circ f^{-1}}$. Per definition af f gælder

$$\forall x \in A(f(x) \in V \ominus I(x))$$

som kan omskrives til

$$\forall x \in A(f(x) \in V \leftrightarrow f(x) \notin I(x))$$

og ved indførsel af substitutionen $y = f(x)$:

$$\forall y \in B(y \in V \leftrightarrow y \notin I(f^{-1}(y))).$$

Da $V \subseteq B$ giver dette os

$$V = \big\{y \in B \mid y \notin I(f^{-1}(y))\big\} = \overline{\Delta}_{I \circ f^{-1}}$$

som ønsket.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Da B er tællelig eksisterer der en bijektion $b : B \to \mathbb{N}$ og denne bestemmer en entydig velordning $(B, \prec)$ af B så b bliver en isomorfi af $(B, \prec)$ på $(\mathbb{N}, <)$, dvs. så $(B, \prec)$ bliver en velordning af type $\mathbb{N}$. Lad $f : A \to B$ være givet ved udtrykket i (ii) og lad $J = I \circ f^{-1} : B \to \mathcal{P}(B)$. Idet $f : A \to B$ er bijektiv gælder

$$\operatorname{ran}(J) = \operatorname{ran}(I \circ f^{-1}) = \operatorname{ran}(I).$$

Desuden gælder $V = \overline{\Delta}_{I \circ f^{-1}} = \overline{\Delta}_J$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Det generaliserede diagonalargument, Lemma 4, giver os at

$$\overline{\Delta}_J \in \mathcal{P}(B) - \operatorname{ran}(J) = \mathcal{P}(B) - \operatorname{ran}(I).$$

Der gælder således $\overline{\Delta}_J \notin I(A)$ og da $V = \overline{\Delta}_J$ er det ønskede hermed vist. $\square$

Eksempel 79. Vi viser i dette eksempel at kravet om at $I(A)$ er lukket under endelige ændringer på B er nødvendigt i ovenstående teorem. Dette gøres ved at give et modeksempel til teoremet i et tilfælde hvor $I(A)$ ikke er lukket under endelige ændringer på B. Lad $A = B = \mathbb{N}$ og lad $I : A \to \mathcal{P}(B)$ være den konstante afbildning $I(x) = \emptyset$. Lad $V = \{0\} \in \mathcal{P}(B)$. Da gælder $V \notin I(A) = \{\emptyset\}$, dvs. (i) er opfyldt. Men (iii) er ikke opfyldt da den eneste afbildning $J : B \to \mathcal{P}(B)$ med $\operatorname{ran}(J) = \operatorname{ran}(I) = \{\emptyset\}$ er afbildningen med $J(x) = \emptyset$ for alle $x \in B$ og for denne afbildning gælder

$$\overline{\Delta}_J = \{x \in B \mid x \notin J(x)\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin \emptyset\} = \mathbb{N}$$

dvs. $\overline{\Delta}_J \neq V$.

Ovenstående teorem viser at Cantors diagonaliseringsmetode er universel i den forstand at enhver delmængde V af en tællelig mængde B som kan vises ikke at være i en mængde $S \subseteq \mathcal{P}(B)$ lukket under endelige ændringer, kan vises ikke at være i S ved at vise at $V = \overline{\Delta}_J$ for en passende afbildning $J : B \to \mathcal{P}(B)$ med $J(B) = S$ og dernæst benytte Cantors diagonalargument (Lemma 4) for at $\overline{\Delta}_J \notin J(B) = S$.

Af ovenstående teorem får vi følgende korollar omhandlende formelle systemer.

Korollar 80. *Lad φ være et formelt system hvor $E_{\beta(\varphi)}(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)})$ er lukket under endelige ændringer på $K_{\beta(\varphi)}$. Enhver mængde $M \subseteq K_{\sigma(\varphi)}$ der har navn i $\sigma(\varphi)$ men ikke i $\beta(\varphi)$ kan skrives som en antidiagonal*

$$M = \overline{\Delta}_{E_{\beta(\varphi)} \circ h}$$

hvor $h : K_{\beta(\varphi)} \to Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)}$ er bijektiv, og hermed

$$\mathrm{ran}(E_{\beta(\varphi)} \circ h) = E_{\beta(\varphi)}(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)}).$$

Desuden, hvis $\overline{M}$ er navn for M i $\sigma(\varphi)$ da er

$$O_{\sigma(\varphi)}(\overline{M}, h^{-1}(\overline{M}))$$

en uafgørbar sætning i φ.

Bevis Lad $g : \Sigma^*_{\beta(\varphi)} \to K_{\beta(\varphi)}$ være en Gödel-kodning i $\beta(\varphi)$. I ovenstående teorem lader vi

- $B = K_{\beta(\varphi)}$.
- $A = g(Pr_{\beta(\varphi)}) \subseteq B$.
- $I : g(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)}) \to \mathcal{P}(K_{\beta(\varphi)})$ være afbildningen $E_{\beta(\varphi) \circ g^{-1} \restriction g(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)})}$.
- $V = M$.

$I(A) = E_{\beta(\varphi)}(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)})$ er ifølge forudsætningerne lukket under endelige ændringer på $B = K_{\beta(\varphi)}$. Da $V = M \notin E_{\beta(\varphi)}(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)})$, idet M ikke har navn i $\beta(\varphi)$, viser teoremet at der eksisterer en bijektion $f : g(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)}) \to K_{\beta(\varphi)}$ så

$$M = \overline{\Delta}_{I \circ f^{-1}}.$$

Da $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{ran}(g)$ og g og f begge er injektive kan vi danne afbildningen $h = g^{-1} \circ f^{-1}$ som da f er bijektiv bliver en bijektion af $\mathrm{ran}(f) = K_{\beta(\varphi)}$ på

$$g^{-1} \circ f^{-1}(K_{\beta(\varphi)}) = g^{-1}(g(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)})) = Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)}.$$

Der gælder nu

$$M = \overline{\Delta}_{I\circ f^{-1}} = \overline{\Delta}_{(E_{\beta(\varphi)}\circ g^{-1}\restriction g(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)}))\circ f^{-1}} = \overline{\Delta}_{E_{\beta(\varphi)}\circ g^{-1}\circ f^{-1}} = \overline{\Delta}_{E_{\beta(\varphi)}\circ h}$$

som ønsket.

Vi skal vise at hvis $\overline{M}$ er navn for M i $\sigma(\varphi)$ da er $O_{\sigma(\varphi)}(\overline{M}, h^{-1}(\overline{M}))$ uafgørbar i φ. Der gælder

$$\begin{aligned}
& O_{\sigma(\varphi)}(\overline{M}, h^{-1}(\overline{M})) \in T_{\sigma(\varphi)} \\
\Leftrightarrow\ & h^{-1}(\overline{M}) \in M \\
\Leftrightarrow\ & h^{-1}(\overline{M}) \in \overline{\Delta}_{E_{\beta(\varphi)}\circ h} \\
\Leftrightarrow\ & h^{-1}(\overline{M}) \notin E_{\beta(\varphi)} \circ h(h^{-1}(\overline{M})) \\
\Leftrightarrow\ & h^{-1}(\overline{M}) \notin E_{\beta(\varphi)}(\overline{M}) \\
\Leftrightarrow\ & O_{\sigma(\varphi)}(\overline{M}, h^{-1}(\overline{M})) \notin T_{\beta(\varphi)}
\end{aligned}$$

hvilket viser at sætningen $O_{\sigma(\varphi)}(\overline{M}, h^{-1}(\overline{M}))$ er uafgørbar. □

Lad φ være FA udstyret med en realistisk bevisrelation. Da

$$E_{\sigma(\varphi)}(Pr^{(1)}_{\sigma(\varphi)}) = E_{FA}(Pr^{(1)}_{FA})$$

ifølge Eksempel 77 er lukket under endelige ændringer på $K_{\sigma(\varphi)} = K_{FA}$ vil der i konkrete tilfælde også typisk gælde at $E_{\beta(\varphi)}(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)})$ er lukket under endelige ændringer på $K_{\beta(\varphi)} = K_{\sigma(\varphi)}$. Selvom vi skulle befinde os i et tilfælde hvor dette ikke gælder, er det uproblematisk at justere på bevisrelationen så vi får en ny realistisk bevisrelation der dels opfylder lukkethedsegenskaben og dels giver anledning til færre uafgørbare sætninger end den oprindelige bevisrelation. Lad os altså antage at $E_{\beta(\varphi)}(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)})$ er lukket under endelige ændringer på $K_{\beta(\varphi)}$ i det formelle system φ. Da er komplementærmængden

$$\mathcal{P}(K_{FA}) - E_{\beta(\varphi)}(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)})$$

ligeledes lukket under endelige ændringer på K_{FA}, og hermed må også mængden

$$E_{\sigma(\varphi)}(Pr^{(1)}_{\sigma(\varphi)}) - E_{\beta(\varphi)}(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)})$$

være lukket under endelige ændringer på K_{FA}, idet $E_{\sigma(\varphi)}(Pr^{(1)}_{\sigma(\varphi)})$ er det. Af figuren på side 92 ses det at mængden

$$E_{\sigma(\varphi)}(Pr^{(1)}_{\sigma(\varphi)}) - E_{\beta(\varphi)}(Pr^{(1)}_{\beta(\varphi)})$$

er ikke-tom. Da den desuden er lukket under endelige ændringer på K_{FA} må den være uendelig. Ovenstående korollar viser at enhver af disse uendeligt mange mængder kan skrives som antidiagonalen mht. en passende afbildning og at enhver af mængderne giver anledning til en uafgørbar sætning. Korollaret viser desuden at alle disse uafgørbare sætninger er forskellige. Med andre ord eksisterer der uendeligt mange egenskaber ved de naturlige tal som kan udtrykkes i *FA* men ikke i $\beta(\varphi)$ og hver eneste af disse egenskaber producerer sin egen uafgørbare sætning i det formelle system. Vi kan desuden angive konkrete udtryk for disse uafgørbare sætninger da korollaret er bevist konstruktivt. Alle kan skrives på formen

$$O_{\sigma(\varphi)}(\overline{\overline{\Delta}_{E_{\beta(\varphi)}\circ h}}, h^{-1}(\overline{\overline{\Delta}_{E_{\beta(\varphi)}\circ h}}))$$

for et passende valg af h.

Bemærkninger og referencer Teorem 78 er mit eget resultat. Jeg er ikke bekendt med andre resultater som viser noget tilsvarende. Teoremet vil utvivlsomt kunne generaliseres udover det tællelige tilfælde, og vil sikkert også kunne generaliseres en smule i forudsætningerne.

A Mathematica-program

In[1]:=

```
nlast[x_ /; StringLength[x]<=1]:="" ; nlast[x_]:=StringDrop[x,-1]
last[""]:="" ; last[x_]:=StringTake[x,-1]
conc[x_,y_]:=StringJoin[x,y]
```

In[4]:=

```
takevar[x1_]:=Module[{y=""},
y="x"; x1=nlast[x1];
While[last[x1]=="'",
        x1=nlast[x1]; y=conc["'",y];
];
x1=nlast[x1]; y=conc["x",y];
y]
```

In[5]:=

```
freeocc[x1_,x2_]:=Module[{y="",z1="",z2="",z3=""},
If[last[x1]=="E",y="";z1="" ,
        If[last[x1]=="A",y="";z1="",y="0";z1=x1]
];
While[z1!="",
        z2="0";
        While[z2!="",
                If[last[z1]=="[",z2=nlast[z2],
                        If[last[z1]=="]",z2=conc[z2,"0"]]
                ];
                z1=nlast[z1]; If[z1=="",z2=""];
        ];
        If[last[z1]=="x",
                z3=takevar[Unevaluated[z1]]; If[z3==x2,y="";z2=""]
        ]
];
y]
```

In[6]:=

```
subst[x1_,x2_]:=Module[{y="",z1=""},
While[x1!="",
        If[last[x1]=="x",
                z1=takevar[Unevaluated[x1]];
                z2=freeocc[Unevaluated[x1],Unevaluated[z1]];
                If[z2!="",y=conc[x2,y],y=conc[z1,y]]
                ,y=conc[last[x1],y]; x1=nlast[x1]
        ]
];
y]
```

In[7]:=

```
x1="Ex''x[x''x+x'x=0&Ax'x[x'x*x''x=x'x]]";
x2="00";
```

In[9]:=

```
subst[Unevaluated[x1],Unevaluated[x2]]
```

Out[9]=

```
Ex''x[x''x+00=0&Ax'x[x'x*x''x=x'x]]
```

Litteratur

[Can32] Georg Cantor. *Gesammelte Abhandlungen.* Springer Verlag, 1932.

[Itô93] Kiyosi Itô, editor. *Encyclopedic Dictionary of Mathematics, Second Edition.* MIT Press, 1993.

[Jon97] Neil D. Jones. *Computability and Complexity.* MIT Press, 1997.

[Kun80] Kenneth Kunen. *Set Theory—An Introduction to Independence Proofs.* North-Holland, 1980.

[Lüb83] Poul Lübcke, editor. *Politikens Filosofi Leksikon.* Politikens Forlag, 1983.

[Men97] Elliott Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic.* Chapman & Hall, 1997.

[Mes67] Herbert Meschkowski. *Probleme des Unendlichen—Werk und Leben Georg Cantors.* Vieweg, 1967.

[Nor97] Dag Normann. Introduction to Recursion Theory. Copenhagen Logic Summer School, 1997.

[Odi92] Piergiorgio Odifreddi. *Classical Recursion Theory—The Theory of Functions and Sets of Natural Numbers.* North-Holland, 1992.

[PS94] Donald Perlis and V. S. Subrahmanian. Meta-languages, Reflection Principles and Self-Reference. In *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 2. Oxford University Press, 1994.

[Smu92] Raymond M. Smullyan. *Gödel's Incompleteness Theorems.* Oxford University Press, 1992.

[Tar94] Alfred Tarski. The Semantic Conception of Thruth and The Foundations of Semantics. In *Basic Topics in the Philosophy of Language.* Prentice Hall, 1994.