

# Spektralfaktorisering

Niels Kjølstad Poulsen                      Morten Rostgaard  
Anca Hansen                                      Morten B. Lauritsen  
Ma Xin    Uffe H. Thygesen

Institut for Matematisk Modellering, bygning 321  
Danmarks Tekniske Universitet  
DK-2800 Lyngby

Marts 11, 1999

## Abstract

Nærværende rapport er udarbejdet med henblik på dokumentation arbejdet med spektralfaktorisering og den numeriske implementeringen i dels de to velkendte domæiner og dels i to operator domæiner. Innovationen i denne rapport består først og fremmest af en uniform beskrivelse af problemet i fire kendte domæiner samt en kompakt numerisk løsning. Dernæst indeholder denne rapport en løsning af spektralfaktoriserings problemet i delta domæinet, der ikke involverer en transformation til et andet domæine. Rapporten indeholder desuden en beskrivelse af en række anvendelser af spektralfaktorisering.

## keywords

Spektralfaktorisering, Modellering, Regulering, Operator modeller, Delta modeller, Gamma modeller

## 1 Baggrund

Der eksisterer sluttede analytiske udtryk for spektralfaktorisering, men kun for problemer af en relativ lav orden. I [20] er der angivet op til og med anden orden. Det er velkendt at spektralfaktorisering baseret på en sortering af et speltrums nulpunkter, hurtigt (dvs. for voksende orden af problemet) bliver numerisk uhåndterbart. De metoder der vil blive behandlet i denne rapport er baseret på numeriske søgeroutiner. Metoderne er begrænset til beskrivelser vha. af polynomier (og overføringsfunktioner). Der er metoder, der er baseret på en transformation til tilstandsdomænet og en løsning af Ricatti ligningen. Dette alternativ vil ikke blive beskrevet eller undersøgt i denne rapport.

Spektralfaktorisering er behandlet flere steder i litteraturen bl. a. i [33] og [34]. Senere i [30], [31] og ikke mindst i [12]. Det falder uden for denne rapport rammer at give en udtømmende liste men emnet er behandlet bl.a. i [22] og specielt i [16], der ud over spektralfaktorisering indeholder en diskussion af flere forskellige numeriske metoder anvendt indenfor reguleringsteori.

## 2 Introduktion

Lad i det følgende  $s \in \mathbb{C}$  være den løbende variabel i et polynomie

$$A(s) = a_0 s^{n_a} + a_1 s^{n_a-1} + \dots + a_{n_a}$$

med reelle koefficienter, dvs.  $a_i \in \mathbb{R}$ . Det er velkendt fra den matematiske analyse (se f.eks. [9]) at nulpunkterne for en funktion med reelle koefficienter har reelle nulpunkter eller komplekse nulpunkter, der optræder som par (som komplekskonjugerede). Det er muligt at repræsentere polynomiet i vektoren:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n_a} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_a+1}$$

dvs. at:

$$A(s) = [s^{n_a} \quad s^{n_a-1} \quad \dots \quad 1] \mathcal{A}$$

Lad  $B(s)$  være et andet polynomie

$$B(s) = b_0 s^{n_b} + b_1 s^{n_b-1} + \dots + b_{n_b} \quad b_i \in \mathbb{R}$$

med en tilsvarende vektorrepræsentation,  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n_b+1}$ . Det kan relativt let vises, at koefficienterne i et polynomieprodukt

$$C(s) = A(s)B(s)$$

kan skrives på formen:

$$\mathcal{C} = \mathcal{T}(\mathcal{A})\mathcal{B}$$

hvor  $\mathcal{T}(\mathcal{A})$  er en toeplitzmatrix, dvs. opfylder at:

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n_a} & a_{n_a-1} & \cdots & a_0 & 0 \\ 0 & a_{n_a} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n_a} & a_{n_a-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n_a} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_a+n_b+1) \times (n_b+1)}$$

Der gælder desuden at:

$$\mathcal{C} = \mathcal{T}(\mathcal{B})\mathcal{A}$$

For hver af de omtalte domainer eksister der en karakterisk afbildning  $\tilde{s}$  af  $s$ . Denne afbildning vil vi i det følgende betegne som den (for domainet så karakteriske) spektrale afbildning. For et polynomie gælder at:

$$\tilde{A}(s) = A(\tilde{s})$$

eller at:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{H}\mathcal{A}$$

hvor  $\mathcal{H}$  er karakteristisk matrix for afbildningen. For de fire behandlede domainer er stabilitetsgrænsen invariant overfor denne afbildning.

I denne rapport vil vi betragte metoder til faktorisere spektra, der er rationelle i  $s$ . Det viser sig imidlertid at kerneproblemet består i at faktorisere spektra, der er polynomier (eller polynomielige). Et spektrum defineret sædvanligvis ud fra en transformation af en kovariansfunktion. Som tidligere nævnt optræder spektralfaktorisering imidlertid også i forbindelse med spektra, der ikke er fremkommet ved denne transformation. Vi anvender derfor en alternativ definition, der tager udgangspunkt i egenskaberne for spektralafbildningen.

**Definition 2.1** Et spektrum,  $M(s)$  er defineret ved at:

$$\tilde{M}(s) = M(s) \quad (1)$$

dvs. er defineret ved at være invariant overfor spektralfaktoreringen.  $\square$

Kravet (1) har dels betydning for koefficienterne i  $M(s)$  og dels for ordenen af  $M(s)$ . Vi vil først fokusere på det første problem. I vektorfremstilling kan vi karakterisere et spektrum ved at:

$$\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{H}\mathcal{M}$$

eller at:

$$(\mathcal{I} - \mathcal{H})\mathcal{M} = 0$$

Dvs. at  $\mathcal{M}$  ligger i nulrummet til

$$\mathcal{D} = \mathcal{I} - \mathcal{H} \quad (2)$$

Lad  $k$  betegne antallet af koefficienter i  $M(s)$  eller elementer i  $\mathcal{M}$ . Da er  $l = k - \rho(\mathcal{D})$  dimensionen af nulrummet for  $\mathcal{D}$ . Der eksisterer en matrix  $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{k \times l}$ , hvis søjler udspænder nulrummet til  $\mathcal{D}$ . Der kan vælges en orthonormal udspænding, f.eks. baseret på (dvs. genereret ud fra) en Gram-Schmidt orthogonalisering. For enhver  $\mathcal{M}$  eksisterer en  $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^l$  (minimal parametrisering) således at:

$$\mathcal{M} = \mathcal{Q}\mathcal{R}$$

Det betyder bl.a. at:

$$\mathcal{D}\mathcal{Q} = 0 \quad \in \mathbb{R}^{k \times l} \quad (3)$$

altså at  $\mathcal{Q}$  kan bestemmes som en udspænding af nulrummet for  $\mathcal{D}$  (med null). Tilsvarende eksisterer en  $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{l \times k}$  således at:

$$\mathcal{R} = \mathcal{K}\mathcal{M}$$

Der gælder trivielt at:

$$\mathcal{K}\mathcal{Q} = I \quad \in \mathbb{R}^{l \times l} \quad (4)$$

idet  $\mathcal{R} = \mathcal{K}\mathcal{Q}\mathcal{R}$ . Det ses heraf at det er muligt at vælge

$$\mathcal{K} = [\mathcal{Q}^\top \mathcal{Q}]^{-1} \mathcal{Q}^\top \quad (5)$$

Hvis søjlerne i  $\mathcal{Q}$  er en orthonormal udspænding gælder at:

$$\mathcal{Q}^\top \mathcal{Q} = I \quad \mathcal{K}\mathcal{K}^\top = I$$

dvs. at rækkerne i  $\mathcal{K}$  er orthonormale. Lad os nu fokusere på spektralfaktorisering.

**Definition 2.2** Spektralfaktorisering består i, at bestemme et polynomium

$$P(s) = p_0 s^n + p_1 s^{n-1} + \dots + p_n$$

( $s \in \mathbb{C}$ ,  $p_i \in \mathbb{R}$ ) således at:

$$M(s) = P(s)\tilde{P}(s) \quad (6)$$

under den restriktion at  $P(s)$  ikke har rødder udenfor stabilitetsområdet.  $\square$

Formuleret i vektornotation skal der altså bestemmes et  $\mathcal{P}$  således at:

$$\mathcal{M} = \mathcal{T}(\mathcal{P})\mathcal{H}\mathcal{P}$$

Idet multiplikation mellem polynomier er kommutativ kan vi alternativt skrive:

$$\mathcal{M} = \mathcal{T}(\mathcal{H}\mathcal{P})\mathcal{P}$$

I en type af numeriske metoder til løsning af ovenstående problem er valget af parametriseringer, dvs.  $\mathcal{K}$ , overordenligt vigtigt. Vi vil i det efterfølgende studere valg af  $\mathcal{K}$  i de fire domainer.

### 3 Fire domainer

Lad os nu i det følgende betragte problematikken omkring spektrafaktorisering i hver af de enkelte domainer.

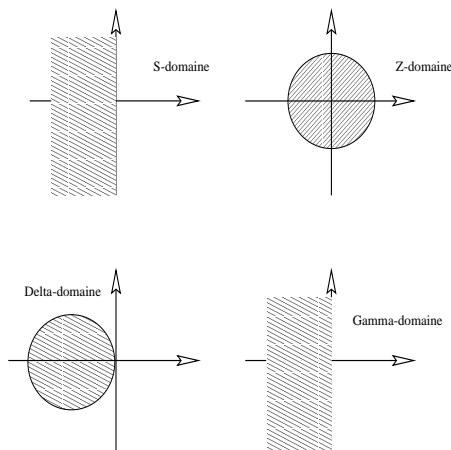


Figure 1. Stabilitetområder for de fire domainer.

#### 3.1 Kontinuert tid

Mange dynamiske systemer beskrives naturligt af tidskontinuere modeller, hvor den anvendte operator er differentialoperatoren,

$$\frac{d}{dt}$$

Man vil ofte finde at dynamiske systemer, der optræder i en reguleringsteknisk sammenhæng beskrives af en ordinær differentiaalligning. Denne er ofte lineær og tidsinvariant (eller rettere er systemet tilstræbt beskrevet af LTI model). Til beskrivelsen er det muligt at anvende forskellige transformationsteknikker, f.eks. Laplace teknikken. Lad  $\{v(t)\}$  være en svag stationær proces, med spektrum,  $\Phi(s)$  og lad  $H(s)$  være overføringsfunktionen for et dynamisk system, der påvirkes af  $v(t)$ . Udgangen af systemet vil (se f.eks. [2]) have et spektrum givet ved:

$$\Phi_y(s) = H(s)\Phi(s)H(-s) \quad (7)$$

Lad os betragte et polynomium (med reelle koefficienter)

$$P(s) = p_0s^m + p_1s^{m-1} + \dots + p_{m-1}s + p_m \quad p_i \in \mathbb{R}$$

Vi vil derfor ifølge (7) i kontinuert tid operere med en spektralafbildning givet ved:

$$\tilde{P}(s) = P(-s)$$

Specielt gælder at:

$$\tilde{s} = -s$$

Vi ser at stabilitetsgrænsen, dvs. den imaginære akse, er invariant overfor denne afbildning. Videre har vi at:

$$\tilde{P}(s) = (-1)^m p_0s^m + (-1)^{m-1} p_1s^{m-1} + \dots - p_{m-1}s + p_m$$

hvilket vil sige at:

$$\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{HP}$$

hvor:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} (-1)^m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{m-1} & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eller at:

$$\tilde{p}_i = (-1)^{m-i} p_i \quad i = 0, \dots, m$$

Lad os nu vende os mod polynomiespektra. Et polynomiespektrum,  $M(s)$ , i kontinuert tid er et polynomie med reelle koefficienter, der opfylder at:

$$M(-s) = M(s)$$

Dette betyder at  $M(s)$  kun indeholder lige potenser af  $s$  eller at  $M(s)$  er polynomium i  $s^2$ . Dvs. vi kan skive:

$$M(s) = r_0 s^{2n} + r_1 s^{2n-2} + \dots + r_n \quad s \in \mathbb{C} \quad (8)$$

hvor koefficienter er reelle ( $r_i \in \mathbb{R}$ ). På den imaginære akse gælder endvidere at:

$$M(s) = |P(s)|^2 \in \mathbb{R} \quad s = j\omega$$

Generelt er  $M(s)$  et polynomie med ordenen  $2n$ . Dermed er  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{2n+1}$  eller rettere  $\mathcal{M}$  er beliggende i et underrum af  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Vi kan direkte fra (8) se at dette underrum er givet ved at:

$$\mathcal{D}\mathcal{M} = 0$$

hvor:

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n+1) \times (2n+1)} \quad (9)$$

Det bemærkes, at nulrækkerne kan udelades af definitionsmatricen,  $\mathcal{D}$ . Dette tilfælde (kontinuert tid) er så simpelt, at vi direkte kan opskrive  $\mathcal{D}$  (samt  $\mathcal{K}$  og  $\mathcal{Q}$ ). Vi kunne imidlertid også have bestemt  $\mathcal{D}$  ud fra (2) og  $\mathcal{H}$ . Rangnen af  $\mathcal{D}$  er lig  $n$  hvorfor  $\mathcal{M}$  tilhører et underrum med dimensionen  $n + 1$ . Vi kan indføre en parametrisering

$$\mathcal{R} = [r_0, r_1, \dots, r_n]^\top$$

hvorfor der gælder at:

$$\mathcal{R} = \mathcal{K}\mathcal{M}$$

hvor:

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (2n+1)}$$

Desuden gælder der omvendt at:

$$\mathcal{M} = \mathcal{Q}\mathcal{R}$$

hvor:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n+1) \times (n+1)}$$

Det bemærkes, at  $\mathcal{Q} = \mathcal{K}^\top$ . Den simple symmetri (8) bevirker at vi let kan bestemme matricerne  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{K}$  og  $\mathcal{Q}$  direkte. Disse kunne imidlertid også være bestemt ud fra  $\mathcal{H}$  og ligningerne (2), (3) og (5).

**Definition 3.1** I kontinuert tid består spektralfaktoriseringsproblemet i at bestemme et polynomie

$$P(s) = p_0 s^n + p_1 s^{n-1} + \dots + p_n$$

med ingen nulpunkter i højre halvplan således at

$$M(s) = P(s)P(-s)$$

□

Inden vi beskæftiger os med de betingelser, der er betemmende for om hvorvidt spektralfaktoriseringen kan foretages, vil vi angive nogle egenskaber for et polynomiespektrum.

**Sætning 3.1** Et (tidskontinuert) polynomie spektrum opfylder at

$$M(s) = M(-s) \quad s \in \mathbb{C} \quad (10)$$

og at:

$$M(j\omega) \in \mathbb{R} \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

dvs. at et polynomie spektrum er reelt på den imaginære akse. □

**Bevis:** Sætningens første del følger direkte af at  $M$  kun indeholder lige potenser af  $s$ . Sætningens anden del følger af at

$$M(j\omega) = (-1)^n \omega^{2n} r_0 + \dots - r_1 \omega^2 + r_n$$

hvormed  $M$  er reel på den imaginære akse. □

Vi er nu istand til at angive under hvilke betingelser vi kan faktorisere et spektrum. (Nedenstående sætning er en omskrivning af en tilsvarende i [22] gældende i det tidsdiskrete domaine. En tilsvarende [for kontinuer tid] kan findes i [2]).

**Sætning 3.2** Betragt et (tidskontinuert) polynomiespektrum  $M(s)$ , der opfylder at:

$$M(j\omega) \geq 0 \text{ for } \omega \in \mathbb{R}$$

Da (og kun da) eksisterer et polynomie:

$$P(s) = p_0 s^n + p_1 s^{n-1} + \dots + p_n$$

med ingen nulpunkter beliggende i højre halvplan således at:

$$M(s) = P(s)P(-s) \quad (11)$$

Hvis  $M(j\omega) > 0$  er alle nulpunkter for  $P(s)$  beliggende i venstre halvplan. □

**Bevis:** Lad  $z_i$  være et nulpunkt til  $M(s)$ . Ifølge (10) vil  $-z_i$  også være et nulpunkt til  $M(s)$ . Da (10) er gældende overalt i  $\mathbb{C}$  optræder  $z_i$  og  $-z_i$  optræde med samme multiplicitet. Lad os nu arrangere nulpunkterne til  $M(s)$  således at for  $i = 1, \dots, n$

$$\operatorname{Re}(z_i) \leq 0 \quad \operatorname{Re}(z_{n+i}) \geq 0$$

hvor  $z_{n+i} = -z_i$ . Vi kan følgelig skrive at:

$$M(s) = r_0 \prod_{i=1}^n (s - z_i)(s + z_i)$$

Lad os nu indføre det moniske polynomie  $B(s)$  og konstanten  $\kappa$  ved:

$$B(s) = \prod_{i=1}^n (s - z_i) \quad \kappa = (-1)^n r_0$$

Da vil:

$$B(-s) = \prod_{i=1}^n (-s - z_i) = (-1)^n \prod_{i=1}^n (s + z_i)$$

og

$$M(s) = \kappa B(s) B(-s)$$

Lad os nu betragte forholdene på stabilitetsgrænsen. Der gælder at  $\phi(\omega) = M(j\omega) \geq 0$  og dermed at:

$$B(j\omega) B(-j\omega) = |B(j\omega)|^2 \geq 0$$

Dermed skal konstanten  $\kappa$  være reel og positiv, hvormed  $P(s) = \sqrt{\kappa} B(s)$ . Hvis  $\phi(\omega) = M(j\omega) > 0$  vil der ikke være nulpunkter på stabilitetsgrænsen (den imaginære akse) for  $M(s)$  og dermed heller ikke for  $P(s)$ .  $\square$

Lad os nu vende os mod problematikken omkring spektralfaktorisering af et rationelt spektrum, dvs. et spektrum, der har formen:

$$M(s) = \frac{M_b(s)}{M_a(s)}$$

hvor både  $M_b(s)$  og  $M_a(s)$  er polynomiespektra. Det antages at  $M_b(s)$  og  $M_a(s)$  er relative primiske, dvs. kun har fælles faktorer, der ikke indeholder  $s$ . I forbindelse med dette problem gælder **Spektralfaktoriseringssætningen** (se f.eks. [2]). Et rationelt spektrum kan spektralfaktoriseres hvis og kun hvis

$$M(j\omega) \geq 0$$

dvs. et rationelt spektrum kan faktoreres, hvis det ikke er negativt på stabilitetsgrænsen. Spektralfaktoriseringen kan udføres ved at spektralfaktorisere tæller og nævner.

Spektralfaktoriseringssætningen danner grundlaget for den meget vigtige **repræsentationssætning**. En svag stationær proces med et rationelt spektrum kan modelles som udgangen af et lineært asymptotisk stabilt system (dvs. systemets poler er alle beliggende i venstre halvplan) drevet af hvid støj. Systemet har ingen nulpunkter i højre halvplan.

### 3.2 Diskret tid

Dynamiske systemer, der indgår i et digitalt reguleringssystem, kan med passende fordele beskrives i diskret tid, dvs. af differensligninger. Dette skyldes at den digitale regulator kommunikerer med systemet gennem et antal A/D, D/A omsættere. Det kan imidlertid også være tilfældet at systemet naturligt er knyttet til diskret tid. Klassisk anvendes der i diskret tid en skifteoperator  $q$  defineret ved:

$$qy_t = y_{t+h} \quad q^{-1}y_t = y_{t-h}$$

Hvis systemet kan beskrives af et antal lineære, tidsinvariante differensligninger kan der anvendes  $Z$ -transformations teknikker. Mellem den komplekse variable i kontinuert tid  $s_c$  og den tiddiskrete  $s_d$  gælder der at:

$$s_d = e^{s_c h}$$

hvor  $h$  angiver samplingperioden. Bemærk, at sammenhængen også gælder for systempoler, men ikke nødvendigvis for et systems nulpunkter. Den karakteristiske afbildning er i diskret tid:

$$\tilde{P}(s) = P(s^{-1})$$

idet  $\tilde{s}_c = -s_c$ . Dette betyder specielt at:

$$\tilde{s} = s^{-1}$$

Det bemærkes, at enhedscirklen er invariant overfor denne afbildning. På enhedscirklen er  $\tilde{s} = \bar{s}$  (kompleks konjugering). Lad os nu betragte polynomiet

$$P(s) = p_0 s^m + p_1 s^{m-1} + \dots + p_m$$

Vi har, at:

$$\tilde{P}(s) = p_0 s^{-m} + p_1 s^{1-m} + \dots + p_m$$

hvilket også kan skrives som:

$$\tilde{P}(s) = s^{-m} [p_m s^m + p_{m-1} s^{m-1} + \dots + p_1 s + p_0]$$

Ved afbildningen bliver koefficienternes rækkefølge reverseres. Dette betyder at

$$\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{H}\mathcal{P}$$

hvor:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1)^2}$$

Lad os nu vende os mod et polynomiespektrum, der diskret tid opfylder at:

$$M(s) = M(s^{-1})$$

overalt i  $\mathbb{C}$ . Dermed er  $M(s)$  på formen:

$$M(s) = r_n s^n + r_{n-1} s^{n-1} + \dots + r_0 + \dots + r_{n-1} s^{1-n} + r_n s^{-n}$$

eller:

$$M(s) = s^{-n} (r_n s^{2n} + r_{n-1} s^{2n-1} + \dots + r_1 s^{n+1} + r_0 s^n + r_1 s^{n-1} + \dots + r_n)$$

Dette betyder at for et polynomiespektrum er:

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n+1)^2}$$



Det bemærkes at den midterste nulrække kunne udelades, men er medtaget af hensyn til (2). Igen bemærkes det at symmetriforholdene er så enkle, at  $\mathcal{D}$  kan bestemmes direkte. Hvis vi indfører (vælger) parametriseringen:

$$\mathcal{R} = [r_0, r_1, \dots, r_n]^\top$$

gælder der

$$\mathcal{R} = \mathcal{K}\mathcal{M} \quad \mathcal{M} = \mathcal{Q}\mathcal{R}$$

hvor:

$$\mathcal{K} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right] \quad \mathcal{Q} = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{array} \right]$$

Det bemærkes trivielt at:

$$\mathcal{D}\mathcal{Q} = \mathbf{0} \quad \mathcal{K}\mathcal{Q} = \mathbf{I}$$

dvs. at (3) og (4) er opfyldt. Valget af parametrisering eller valget af udspænding af nulrummet for  $\mathcal{D}$ , dvs.  $\mathcal{Q}$ , er orthogonal, men ikke normeret.

**Definition 3.2** Spektralfaktorisering i diskret tid består i, at bestemme et polynomium

$$P(s) = p_0s^n + p_1s^{n-1} + \dots + p_n$$

( $s \in \mathbb{C}$ ,  $p_i \in \mathbb{R}$ ) således at:

$$P(s)P(s^{-1}) = M(s) \tag{12}$$

under den restriktion at  $P(s)$  ikke har rødder udenfor enhedscirklen. □

I forbindelse med diskrete systemer eksister to forskellige traditioner, der er relateret til om hvorvidt der arbejdes med polynomier i  $s^{-1}$  eller i  $s$ . I sammenhæng med spektralfaktorisering kan vi helt ækvivalent arbejde med

$$P(s^{-1}) = p_0 + p_1s^{-1} + \dots + p_ns^{-n}$$

og

$$P(s) = s^n P(s^{-1}) = p_0s^n + p_1s^{n-1} + \dots + p_n$$

idet simple udregninger givet os at:

$$P(s)P(s^{-1}) = s^n P(s^{-1})s^{-n} P(s) = P(s^{-1})P(s)$$

Inden vi fokuserer på spektralfaktoriseringen skal angive to vigtige egenskaber ved et polynomie spektrum.

**Sætning 3.3** Et polynomie spektrum  $M(s)$  opfylder at:

$$M(s) = M(s^{-1}) \tag{13}$$

for ethvert  $s \in \mathbb{C}$ . Desuden gælder at:

$$M(e^{j\omega}) \in \mathbb{R} \quad \omega \in \mathbb{R}$$

dvs. at et polynomiespektrum er reelt på enhedscirklen. □

**Bevis:** Indledningsvis opfylder  $M$  at:

$$M(s) = r_0 + r_1(s + s^{-1}) + r_2(s^2 + s^{-2}) + \dots + r_n(s^n + s^{-n})$$

Sætningens første del følger umiddelbart af at leddene:

$$r_i s^i + r_i s^{-i} \quad r_i \in \mathbb{R} \text{ for } i = 1, \dots, n$$

er invariant overfor transformationen  $s \rightarrow s^{-1}$ . Sætningens anden del følger umiddelbart af at:

$$r_i s^i + r_i s^{-i} \in \mathbb{R} \text{ for } i = 1, \dots, n$$

□

Spektralfaktorisering er består i at finde et polynomie,  $P$  således at der specielt på enhedscirklen gælder at:

$$M(s) = |P(s)|^2 \quad s = e^{j\omega}$$

Hvis der gælder, at  $M(s)$  ikke er negativ på enhedscirklen kan  $M(s)$  (jvf [22]) spektralfaktoriseres.

**Sætning 3.4** Betragt et polynomiespektrum  $M(s)$  der opfylder at:

$$M(e^{j\omega}) \geq 0$$

Da (og kun da) eksister et polynomie:

$$P(s) = p_0 s^n + p_1 s^{n-1} + \dots + p_n \quad p_i \in \mathbb{R}$$

med ingen nulpunkter beliggende udenfor enhedscirklen således at:

$$M(s) = P(s)P(s^{-1}) \tag{14}$$

Hvis  $M(e^{j\omega}) > 0$  er alle nulpunkter for  $P(s)$  beliggende indenfor enhedscirklen. □

**Bevis:** Ifølge (13) vil et nulpunkt,  $z_i$ , modsvares af et tilsvarende i  $z_i^{-1}$ . Idet (13) er gældene overalt i  $\mathbb{C}$ , vil et nulpunkt indenfor og det modsvarende udenfor enhedscirkeln optræde med samme multiplicitet. Der vil være  $n$  (regnet med multiplicitet) nulpunkter  $z_i, i = 1, \dots, n$ , der ikke ligger udenfor og andre  $n$  nulpunkter, der ikke ligger indenfor enhedscirklen. Lad os arrangere nulpunkterne således at for  $i = 1, \dots, n$

$$0 < |z_i| \leq 1 \quad 1 \leq |z_{i+n}| \leq \infty$$

og hvor  $z_{n+i} = z_i^{-1} \quad i = 1, \dots, n$ . Vi kan derfor skrive at:

$$M(s) = s^{-n} r_n \prod_{i=1}^n (s - z_i)(s - z_i^{-1})$$

Lad os indføre det moniske polynomium  $B(s)$  og konstanten  $\kappa$  ved:

$$B(s) = \prod_{i=1}^n (s - z_i) \quad \kappa = \frac{(-1)^n r_n}{\prod_{i=1}^n z_i}$$

Da vil:

$$B(s^{-1}) = \prod_{i=1}^n (s^{-1} - z_i) = (-1)^n s^{-n} \left[ \prod_{i=1}^n z_i \right] \times \prod_{i=1}^n (s - z_i^{-1})$$

hvormed:

$$M(s) = \kappa B(s) B(s^{-1})$$

Lad os nu betragte forholdene på enhedscirklen. Der gælder at

$$B(e^{j\omega}) B(e^{-j\omega}) = |B(e^{j\omega})|^2 \geq 0$$

Dermed skal konstanten  $\kappa$  være reel. Hvis og kun hvis  $\kappa$  ikke er negativ og dermed at  $\phi(\omega) = M(e^{j\omega}) \geq 0$  kan vi skrive at  $P(s) = \sqrt{\kappa} B(s)$ . Hvis  $\phi(\omega) = M(e^{j\omega}) > 0$  vil der ikke være nulpunkter på endhedscirklen for  $M(s)$  og dermed heller ikke for  $P(s)$ . □

**Eksempel 3.1 (Modellering)** Betragt en (svag) stationær proces  $\{v_t\}$  hvor

$$v_t \in \mathbb{F}(0, \sigma_v^2)$$

dvs. har middelværdien nul og variansen  $\sigma_v^2$ . Antag, at denne proces har en kovariansfunktion

$$r_\tau = E\{v_t v_{t-\tau}\}$$

der kun antager værdier forskellig fra nul i intervallet  $\tau \in [-n; n]$ . Dermed er spektrummet givet ved:

$$M(s) = r_n s^n + r_{n-1} s^{n-1} + \dots + r_0 + \dots + r_{n-1} s^{1-n} + r_n s^{-n}$$

Det bemærkes at  $M(s)$  er et polynomiespektrum. Da et spektrum for en (svag) stationær proces ikke er negativ på enhedscirklen kan  $M(s)$  spektralfaktoriseres. Vi kan dermed modellere  $\{v_t\}$  ved:

$$v_t = C(q^{-1})e_t \quad e_t \in \mathbb{F}_{iid}(0, \sigma^2)$$

hvor polynomiet:

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_n q^{-n}$$

opfylder

$$M(s) = C(s^{-1})C(s)\sigma_e^2$$

altså bestemt ved en spektralfaktorisering. □

**Eksempel 3.2 (Regulering)** En styring af det stokastiske system

$$A(q^{-1})y_t = q^{-k}B(q^{-1})u_t + C(q^{-1})e_t$$

således at kriteriet

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} E\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2 + \rho u_i^2\right\}$$

antager sit minimum er givet ved:

$$R(q^{-1})u_t = -S(q^{-1})y_t$$

Her er polynomierne  $R$  og  $S$  løsninger til diophantineligningen

$$P(s^{-1})C(s^{-1}) = A(s^{-1})R(s^{-1}) + s^{-k}B(s^{-1})S(s^{-1})$$

Polynomiet  $P$ , der indgår i diophantineligningen, er bestemt ved spektralfaktorisering, dvs. af:

$$P(s^{-1})P(s) = B(s^{-1})B(s) + \rho A(s^{-1})A(s)$$

Det bemærkes at  $|B(e^{j\omega})|^2 + \rho|A(e^{j\omega})|^2 \geq 0$ , hvormed forsætningen for sætning 3.4 [side 10] er opfyldt. □

**Eksempel 3.3** Lad os nu betragte et stokastisk system

$$Ay_t = q^{-k}Bu_t + Ce_t$$

der ønskes styret således med henblik på en reference der udvikles efter

$$w_t = \frac{C_w}{A_w} \eta_t$$

hvor  $\eta_t$  er en stokastisk proces. For at transformere problemet til et standardproblem indføres fejlen,

$$z_t = y_t - w_t$$

der har en beskrivelse af formen:

$$Az_t = q^{-k}Bu_t + \frac{CA_w e_t - C_w A \eta_t}{A_w}$$

Denne beskrivelse kan på ækvivalent måde (har samme korrelations funktion) beskrives af

$$Az_t = q^{-k}Bu_t + \frac{D}{A_w}\xi_t$$

Her er:

$$M(z) = D(z)D(z^{-1})\sigma_\xi^2$$

hvor:

$$M(z) = D(z)A_w(z)A_w(z^{-1})D(z^{-1})\sigma_e^2 + D_w(z)A(z)A(z^{-1})D_w(z^{-1})\sigma_\eta^2$$

Det bemærkes, at forudsætningen for sætning 3.4 [side 10] er opfyldt.  $\square$

Lad os nu vende os mod problematikken omkring spektralfaktorisering af et rationelt spektrum, dvs. et spektrum, der har formen:

$$M(s) = \frac{M_b(s)}{M_a(s)}$$

hvor både  $M_b(s)$  og  $M_a(s)$  er polynomiespektra. Det antages at  $M_b(s)$  og  $M_a(s)$  er relative primiske, dvs. kun har fælles faktorer, der ikke indeholder  $s$ . I forbindelse med dette problem gælder **Spektralfaktoriseringssætningen** (se eg. [2]). Et rationelt spektrum kan spektralfaktoriseres hvis og kun hvis

$$M(e^{j\omega}) \geq 0$$

dvs. et rationelt spektrum kan faktoriseres, hvis det ikke er negativt på stabilitetsgrænsen. Spektralfaktoreringen kan udføres ved at spektralfaktorisere tæller og nævner.

Spektralfaktoriseringssætningen danner grundlaget for den meget vigtige **repræsentationsætning**. En svag stationær proces med et rationelt spektrum kan modelles som udgangen af et lineært asymptotisk stabilt system drevet af hvid støj. Systemet har ingen nulpunkter udenfor enhedscirklen.

**Eksempel 3.4** Antag, at en (svag) stationær proces er fremkommet ved en addition af to (svagt) stationære processer.

$$y_t = \frac{C_1}{A_1}e_t + \frac{C_2}{A_2}\eta_t$$

hvor  $e_t \in N_{iid}(0, \sigma_e^2)$  og  $\eta_t \in N_{iid}(0, \sigma_\eta^2)$ . Ifølge repræsentationsætningen kan  $y_t$  ækvivalent beskrives af:

$$y_t = \frac{\hat{C}}{A_1 A_2} \xi_t \quad \xi_t \in N_{iid}(0, \sigma_\xi^2)$$

hvor  $\hat{C}$  bestemmes ved spektralfaktorisering, dvs. ud fra ligningen:

$$M(z) = \hat{C}(z)\hat{C}(z^{-1})\sigma_\xi^2$$

hvor:

$$M(z) = C_1(z)A_2(z)A_2(z^{-1})C_1(z^{-1})\sigma_e^2 + C_2(z)A_1(z)A_1(z^{-1})C_2(z^{-1})\sigma_\eta^2$$

Det bemærkes igen at forudsætningerne for sætning 3.4 [side 10] er opfyldt. I appendix er en listing af `ssadd`, der er en implementering af ovenstående addition af to (svagt) stationære processer.  $\square$

**Eksempel 3.5** Denne eksempelsekvens afsluttes med et for regulering så vigtigt specialtilfælde af eksempel (3.4). Antag, at der er forelagt et dynamisk system (på den såkaldte L-form) hvor støjpåvirkningen er en (svag) stationær proces overlejret af drift (der ofte betegnes som integreret hvid støj).

$$Ay_t = q^{-k} \frac{B}{F} u_t + \frac{C}{D} e_t + d \quad d = \frac{1}{\Delta} \eta_t$$

Denne beskrivelse kan omskrives til:

$$Ay_t = q^{-k} \frac{B}{F} u_t + \frac{C\Delta e_t + D\eta}{D\Delta}$$

eller:

$$Ay_t = q^{-k} \frac{B}{F} u_t + \frac{\hat{C}}{D\Delta} \xi_t$$

Her bestemme  $\hat{C}$  ved spektralfaktorisering, dvs. ud fra

$$M(z) = \hat{C}(z)\hat{C}(z^{-1})\sigma_\xi^2$$

hvor:

$$M(z) = C(z)\Delta(z)\Delta(z^{-1})C(z^{-1})\sigma_e^2 + D(z)D(z^{-1})\sigma_\eta^2$$

□

### 3.3 Delta Domainet

Dynamiske (LTI) systemer har i diskret tid traditionelt været beskrevet med modeller formuleret med skifteoperatoren,  $q$  eller med den tilsvarende  $Z$ -transformation. Imidlertid indebærer en sådan beskrivelse visse ulemper i forhold til numerikken ([15]) og til muligheden for at anvende fysisk indsigt i det underliggende dynamiske system (se [7], [29], [28], [13] eller [19]). Desuden indebærer en hurtig sampling og et passende poloverskud en potentiel risiko for nulpunkter udenfor stabilitetsgrænsen (se [3]), hvilket er særdeles uheldigt i forbindelse med regulering. Disse ulemper kan delvist neutraliseres ved at formulere modellen i Delta domainet, dvs. vha. at delta operatoren:

$$\delta = \frac{q-1}{h} \quad q = 1 + h\delta \quad (15)$$

Den tætte knytning til kontinuert tids beskrivelser fremgår tydeligt idet

$$\frac{d}{dt}y(t)|_{t_i \in [t, t+h]} = \delta y(t)$$

for en differetial funktion  $y(t)$ . Deltaoperatoren betegnes også som Euleroperatoren (se eq [27]), hvilket skyldes den tætte knytning til Euler's metode til numerisk løsning af differentilligninger. Det bør dog bemærkes, at en Deltadomine beskrivelse ikke er approximativ, men er en transformation af en tidsdiskret beskrivelse. Analyse og syntese baseret på blandt andet Deltamodeller kan findes i både [14] og i [6]. Imidlertid har der været tidlige tiltag i retning af at anvende denne operator om end i et lidt modificeret version (se [10]). Spektralfaktorisering i deltadomainet er tidligere rapporteret i [20], hvor der angives en meget effektiv algoritme, der er baseret på en transformation til gammadomainet, hvor løsningen findes. Resultatet transformeres tilbage til deltadomainet. I dette afsnit vil vi forsøge med en metode, der ikke bygger på en sådan transformation.

**Sammenhæng mellem  $Z$  og  $\delta$  domainet:** Vi vil nu indledningsvis undersøge hvorledes et polynomie i  $Q$ -domainet

$$\underline{A}(q) = \underline{a}_0 q^n + \underline{a}_1 q^{n-1} + \dots + \underline{a}_n$$

transformeres over i et tilsvarende

$$A(\delta) = a_0 \delta^n + a_1 \delta^{n-1} + \dots + a_n$$

i delta-domainet. Ved substitutionen (15) har vi direkte at

$$A(\delta) = \underline{a}_0(1 + \delta h)^n + \underline{a}_1(1 + \delta h)^{n-1} + \dots + \underline{a}_n$$

der ved hjælp af binomialrækken (se appendix B) kan udtrykkes vektorielt ved:

$$\mathcal{A} = \mathcal{L}(n, h)\underline{\mathcal{A}}$$

hvor:

$$\mathcal{L}(n, x) = \begin{bmatrix} \binom{n}{n} x^n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \binom{n}{n-1} x^{n-1} & \binom{n-1}{n-1} x^{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \binom{n}{n-2} x^{n-2} & \binom{n-1}{n-2} x^{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \binom{n}{1} x^1 & \binom{n-1}{1} x^1 & \dots & \binom{1}{1} x^1 & 0 \\ \binom{n}{0} x^0 & \binom{n-1}{0} x^0 & \dots & \binom{1}{0} x^0 & \binom{0}{0} x^0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

eller udtrykt mere kompakt ved:

$$a_i = \sum_{j=1}^n \binom{n-j}{n-i} h^{n-i} \underline{a}_i$$

Det bemærkes, at  $\mathcal{L}(n, h)$  bliver singulær med  $h \rightarrow 0$ .

Stabilitetsområdet for en model formuleret i Deltadomainet er jvf. (15) en cirkel med centrum i  $-\frac{1}{h}$  og en radius på  $\frac{1}{h}$ . Det vil blandt andet sige at origo får samme betydning som 1 i Z-domainet.

**Refleksion:** Ud fra sammenhængen (15) kan det let indses at spektralfbildningen eller refleksionen i Deltadomainet er givet ved:

$$\tilde{P}(s) = P\left(-\frac{s}{1+sh}\right)$$

hvilket specielt betyder at:

$$\tilde{s} = -\frac{s}{1+sh} \quad s = -\frac{\tilde{s}}{1+\tilde{s}h}$$

Refleksions egenskaberne fra Z-domainet kan naturligvis forventes bevaret ved transformationen til Deltadomainet. F.eks. reflekteres liniestykket  $[-\frac{1}{h}0]$  til  $[0; \infty[$ , idet

$$s = -\sigma \quad (0 < \sigma < \frac{1}{h}) \quad \tilde{s} = \frac{\sigma}{1-\sigma h}$$

På tilsvarende måde vil en cirkel inde i stabilitetsområdet og med centrum i  $-\frac{1}{h}$  reflekteres i en cirkel med samme centrum, men beliggende udenfor stabilitetscirklen. Hvilket fremgår af følgende parameter fremstillinger.

$$s = -\frac{1}{h} + re^{j\omega} \quad \tilde{s} = -\frac{1}{h} + \frac{1}{hr}e^{-j\omega}$$

Lad os nu undersøge refleksion af polynomier, der specielt kan være et polynomie spektrum. Tag udgangspunkt i polynomiumet:

$$\begin{aligned} P(s) &= p_0 s^m + p_1 s^{m-1} + p_2 s^{m-2} \\ &\dots + p_{m-2} s^2 + p_{m-1} s + p_m \end{aligned}$$

der reflekteres til:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(s) &= (1+sh)^{-m} [p_0(-1)^m s^m + p_1(-1)^{m-1}(1+sh)s^{m-1} \\ &+ p_2(-1)^{m-2}(1+sh)^2 s^{m-2} + \dots + p_{m-2}(-1)^2(1+sh)^{m-2} s^2 \\ &+ p_{m-1}(-1)(1+sh)^{m-1} s + p_m(1+sh)^m] \\ &= (1+sh)^{-m} [\tilde{p}_0 s^m + \dots + \tilde{p}_m] \end{aligned}$$

Dette kan også udtrykkes vektorielt med:

$$\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{H}\mathcal{P}$$

hvor:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} (-1)^m & (-1)^{m-1}h & (-1)^{m-2}h^2 \binom{2}{0} & \dots & (-1)^0 h^m \binom{m}{0} \\ 0 & (-1)^{m-1} & (-1)^{m-2}h \binom{2}{1} & \dots & (-1)^0 h^{m-1} \binom{m}{1} \\ 0 & 0 & (-1)^{m-2} \binom{2}{2} & \dots & (-1)^0 h^{m-2} \binom{m}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^0 \binom{m}{m} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Bemærk igen pascal's trekant ingår i transformationmatricen. Det bemærkes desuden at  $\mathcal{H}$  for  $h \rightarrow 0$  konvergerer mod til den tilsvarende fra det tidskontinuerte tilfælde. Reflektion kan også skrives lidt mere kompakt ved:

$$\tilde{p}_i = \sum_{j=i}^m (-1)^{m-j} \binom{j}{i} h^{j-i} p_j$$

for  $i = 0, \dots, m$ .

Lad os nu vende os mod et polynomiespektrum, der i deltadomainet opfylder at:

$$M(s) = M\left(-\frac{s}{1+sh}\right)$$

Hvis vi udnytter afbildningen fra  $Z$ -domainet og anvender at  $s_z = 1 + s_\delta h = 1 + sh$  gælder der at:

$$\begin{aligned} M(s) &= r_n s_z^n + \dots + r_0 + \dots + r_n s_z^{-n} \\ &= r_n (1+sh)^n + \dots + r_0 + \dots + r_n (1+sh)^{-n} \\ &= (1+sh)^{-n} [r_n (1+sh)^{2n} + \dots + r_0 (1+sh)^n + \dots + r_n] \\ &= (1+sh)^{-n} [m_0 s^{2n} + m_1 s^{2n-1} + \dots + m_{2n+1}] \end{aligned}$$

Vi ved, at  $\mathcal{M}$  er en vektor med  $2n+1$  elementer, der tilhører et  $n+1$ -dimensionelt underrum. Der gælder således at:

$$\mathcal{M} = \mathcal{L}(2n, h) \mathcal{Q}_z \mathcal{R}_z$$

Imidlertid er en parametrisering af  $\mathcal{M}$  (en udspænding af  $\mathbb{R}^{2n+1}$ ) ved  $\mathcal{R}_z$  ikke specielt hensigtsmæssigt p.gr.a. af den (for  $h \rightarrow 0$ ) dårligt konditioneret transformation matrix  $\mathcal{L}(2n, h)$ . Derimod er en parametrisering ud fra gamma domainet væsentligt bedre (mere herom i det efterfølgende kapitel).

Vi kan imidlertid vælge en parametrisering, eller ækvivalent hermed, vælge en basis for nulrummet til  $\mathcal{D} = \mathcal{I} - \mathcal{H}$ , hvor:

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{2n}h & (-1)^{2n-1} \binom{2}{0} h^2 & (-1)^{2n-2} \binom{3}{0} h^3 & \dots & - \binom{2n}{0} h^{2n} \\ 0 & 2 & (-1)^{2n-1} \binom{2}{1} h & (-1)^{2n-2} \binom{3}{1} h^2 & \dots & - \binom{2n}{1} h^{2n-1} \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{2n-2} \binom{3}{2} h & \dots & - \binom{2n}{2} h^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & & & & - \binom{2n}{2n-1} h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Dvs. i øvre triangel er elementerne:

$$\mathcal{D}_{ij} = (-1)^{2(n+1)-j} \binom{j-1}{i-1} h^{j-i}$$

for  $1 \leq i \leq 2n$  og  $i < j \leq 2n + 1$ . I diagonalen er:

$$\mathcal{D}_{ii} = 1 - (-1)^{2n-i}$$

for  $i = 1, \dots, 2n + 1$ . Vi kan altså relativt let bestemme matricerne  $\mathcal{Q}$  og  $\mathcal{K}$  ved:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{N}(\mathcal{D}) \quad \mathcal{K} = [\mathcal{Q}^\top \mathcal{Q}]^{-1} \mathcal{Q}^\top$$

Efter således at have betragtet paramteriseringsproblemet er vi nu istand til at vende os mod den egentlige spektralfaktorisering.

**Definition 3.3** I Deltadomainet består spektralfaktoriseringsproblemet i at bestemme et polynomie

$$P(s) = p_0 s^n + p_1 s^{n-1} + \dots + p_{n-1} s + p_n$$

( $s \in \mathbb{C}, p_i \in \mathbb{R}$ ) således at:

$$M(s) = P(s)P\left(-\frac{s}{1+sh}\right)$$

og at  $P(s)$  ikke har rødder udenfor stabilitetsområdet.  $\square$

På grund af den tætte knytning mellem Deltadomainet og q-domainet kan de analytiske resultater umiddelbart overføres. Vi angiver derfor uden bevis følgende to sætninger.

**Sætning 3.5** Et polynomie spektrum  $M(s)$  opfylder at:

$$M(s) = M\left(-\frac{s}{1+sh}\right) \quad (18)$$

for ethvert  $s \in \mathbb{C}$ . Desuden gælder at:

$$M\left(\frac{1}{h}(e^{j\omega} - 1)\right) \in \mathbb{R} \quad \omega \in \mathbb{R}$$

dvs. at et polynomiespektrum er reelt på stabilitetsgrænsen.  $\square$

**Sætning 3.6** Betragt et polynomiespektrum  $M(s)$  der opfylder at:

$$M\left(\frac{1}{h}(e^{j\omega} - 1)\right) \geq 0$$

Da (og kun da) eksister et polynomie:

$$P(s) = p_0 s^n + p_1 s^{n-1} + \dots + p_n \quad p_i \in \mathbb{R}$$

med ingen nulpunkter beliggende udenfor stabilitetgrænsen således at:

$$M(s) = M\left(-\frac{s}{1+sh}\right) \quad (19)$$

Hvis  $M\left(\frac{1}{h}(e^{j\omega} - 1)\right) > 0$  er alle nulpunkter for  $P(s)$  beliggende indenfor stabilitetsområdet.  $\square$



### 3.4 Gamma Domainet

Differentialligninger kan som bekendt løses numerisk med en Eulermetode. Med udgangspunkt i denne metode kan man definere en deltaoperator, der kan anvendes til at give en eksakt beskrivelse af et dynamiske i diskret tid. Dette er en markant og essential forskel i forhold til at løse differentialligninger med en Euler metode, der som bekendt kun giver en approximativ løsning. På sammen måde kan man studere Tustin's metode til løsning af differentialligninger og (som i [6], [19]) definere en Gammaoperator ved:

$$\gamma = \frac{2q-1}{hq+1} \quad q = \frac{1+\frac{1}{2}h\gamma}{1-\frac{1}{2}h\gamma} \quad (20)$$

Denne operator er imidlertid implicit, hvilket gør den noget besværlig ved løsning af diffensligninger. Til gengæld er den egenskaber tættere til differentialoperatorens end deltaoperatoren. Gammaoperatoren kan opfattes som en bilieær transformation, der med fordel kan anvendes for at transformere problemer fra diskret tid ( $Z$ -domainet) over i et domaine, hvor de velkendte operationer fra kontinuertid er gældende. I så fald kan  $h$  opfattes som en karakteristisk størrelse for transformationen og ikke nødvendigvis låst fast til samplingperioden. Det kan yderligere bemærkes at den inverse transformation i (20) har tæt knytning til Pade approximationen

**(Sammenhæng mellem Delta- og Gamma domainet):** Der gælder en ret simpel sammenhæng mellem gamma- og deltaoperatoren:

$$\gamma = \frac{\delta}{1+\frac{h}{2}\delta} \quad \delta = \frac{\gamma}{1-\frac{h}{2}\gamma}$$

Lad  $\underline{A}$  være et polynomie i delta domainet

$$\underline{A}(\delta) = \underline{a}_0\delta^n + \underline{a}_1\delta^{n-1} + \dots + \underline{a}_{n-1}\delta + \underline{a}_n$$

som ved substitutionen bliver transformeret til et tilsvarende

$$A(\gamma) = \left[1 - \frac{h}{2}\gamma\right]^{-n} (a_0\gamma^n + a_1\gamma^{n-1} + \dots + a_n)$$

i gammadomainet, hvor

$$\begin{aligned} A(\gamma) &= \left[1 - \frac{h}{2}\gamma\right]^{-n} \left( \underline{a}_0\gamma^n + \underline{a}_1\gamma \left(1 - \frac{h}{2}\gamma\right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \underline{a}_{n-1}\gamma^{n-1} \left(1 - \frac{h}{2}\gamma\right)^{n-1} + a_n \left(1 - \frac{h}{2}\gamma\right)^n \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Dette kan udtrykkes vektorielt ved

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}(n, \frac{h}{2}) \underline{A}$$

hvor

$$\mathcal{U}(n, x) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} x^0 & \binom{1}{1} x^1 & \dots & \binom{n-1}{n-1} x^{n-1} & \binom{n}{n} x^n \\ 0 & \binom{1}{0} x^0 & \dots & \binom{n-1}{n-2} x^{n-2} & \binom{n}{n-1} x^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \binom{n-1}{0} x^0 & \binom{n}{1} x^1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \binom{n}{0} x^0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Bemærk, at denne matrix konvergerer til identiteten for  $h \rightarrow 0$ . En parametrisering i Delta domainet vha. af parametre i Gamma domainet er derfor fornuftigt.

**(Sammenhæng mellem  $Z$ - og Gamma domainet):** Lad os betragte et polynomie i  $Z$ -domainet

$$\underline{A}(z) = \underline{a}_0z^n + \underline{a}_1z^{n-1} + \dots + \underline{a}_n$$

der i Gammadomainet har udseendet:

$$A(\gamma) = \left[1 - \frac{h}{2}\gamma\right]^{-n} \left( \underline{a}_0 \left[1 + \frac{h}{2}\gamma\right]^n + \underline{a}_1 \left[1 + \frac{h}{2}\gamma\right]^{n-1} \left[1 - \frac{h}{2}\gamma\right] \right. \\ \left. + \underline{a}_{n-1} \left[1 + \frac{h}{2}\gamma\right] \left[1 - \frac{h}{2}\gamma\right]^{n-1} + \underline{a}_n \left[1 - \frac{h}{2}\gamma\right]^n \right) \quad (23)$$

hvilket også kan udtrykkes ved:

$$\mathcal{A}_\gamma = \mathcal{U}\left(n, \frac{h}{2}\right) \mathcal{L}(n, h) \mathcal{A}_q$$

Bemærk, at kun  $\mathcal{L}$  er singular for  $h \rightarrow 0$ .

**(Refleksion):** Ud fra definitionen af  $\gamma$ -operatoren kan vi let transformere refleksionen fra  $Z$ -domainet til Gammadomainet. Der gælder at:

$$\tilde{P}(\gamma) = P(-\gamma)$$

og specielt at:

$$\tilde{\gamma} = -\gamma$$

I spektrale sammenhæng har Gammaoperatoren præcis de samme egenskaber, som er gældende i kontinuert tid. Sætningerne sætning 3.3 [side 9]-sætning 3.1 [side 6] samt spektralfaktorisering- og repræsentationssætningerne er derfor også gældende for Gammadomainet.

## 4 Algoritme

Lad os nu vende os mod den numeriske side af spektralfaktoriseringens problemet. Vi skal numerisk bestemme  $P$  i ligningen:

$$M = P\tilde{P} \quad (24)$$

hvor spektralafbildningen er specifik for de enkelte domæner. I denne fremstilling vil vi formulere problemet som et nulpunktproblem, dvs. bestemme  $P$  som et nulpunkt til

$$F = M - P\tilde{P} \quad (25)$$

eller udtryk vektorielt ved at:

$$\mathcal{F} = \mathcal{M} - \mathcal{T}(\mathcal{P})\mathcal{H}\mathcal{P} = \mathcal{M} - \mathcal{T}(\mathcal{H}\mathcal{P})\mathcal{P}$$

Dette nulpunkt vil vi (på samme måde som i [30]) bestemme med en Newton-Raphson iteration. Lad  $P_i$  være udgangspunktet for en iteration. Dermed er fejlen:

$$F_i = M - P_i\tilde{P}_i.$$

Vi skal nu bestemme en ændring

$$\Delta P = P_{i+1} - P_i \quad \Delta \tilde{P} = \tilde{P}_{i+1} - \tilde{P}_i \quad (26)$$

således at:

$$F_i + \Delta F = 0 \quad (27)$$

Ifølge (25) er:

$$\Delta F = -P_i\Delta\tilde{P} - \tilde{P}_i\Delta P$$

og med (26) giver (27) at  $P_{i+1}$  kan bestemmes som løsning til:

$$M + \tilde{P}_i P_i = P_i \tilde{P}_{i+1} + \tilde{P}_i P_{i+1} \quad (28)$$

Ved at indføre polynomiet  $X_i$  ved

$$P_{i+1} = \frac{1}{2} [P_i + X_i]$$

og indsætte dette udtryk i (28) består kerneproblemet i at bestemme  $X_i$  ud fra

$$2M = P_i \tilde{X}_i + \tilde{P}_i X_i \quad (29)$$

Dette kan også udtrykkes vektorielt ved en bestemmelse af  $\mathcal{X}_i$ , der opfylder at:

$$2\mathcal{M} = [\mathcal{T}(\mathcal{P}_i)\mathcal{H} + \mathcal{T}(\mathcal{H}\mathcal{P}_i)] \mathcal{X}_i \quad (30)$$

og en iteration:

$$\mathcal{P}_{i+1} = \frac{1}{2} [\mathcal{P}_i + \mathcal{X}_i] \quad (31)$$

En nærmere undersøgelse af (30) afslører at dette ligningssystem indeholder  $2n + 1$  ligninger til bestemmelse af  $n + 1$  ubekendte, hvilket hænger meget nøje sammen med at  $\mathcal{M}$  tilhører et  $n + 1$ -dimensionelt underrum til  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Dvs. at:

$$\mathcal{C}_i = \mathcal{T}(\mathcal{P}_i)\mathcal{H} + \mathcal{T}(\mathcal{H}\mathcal{P}_i) \in \mathbb{R}^{(2n+1) \times (n+1)}$$

Der eksisterer flere metoder til at løse problemet. En af dem er den klassiske, der bygger på en bestemt valgt parametrisering (og dermed  $\mathcal{K}$ ) af et spektrum,  $\mathcal{M}$ . Ligningssystemet (30) kan derfor løses ved:

$$\mathcal{X}_i = 2(\mathcal{K}\mathcal{C}_i)^{-1}\mathcal{K}\mathcal{M}$$

Derfor er diskussionen omkring parametrisering i de fire domæner overordentlig vigtig.

En anden metode til løsning af (30) er projektion:

$$\mathcal{X}_i = 2(\mathcal{C}_i^\top \mathcal{C}_i)^{-1}(\mathcal{C}_i^\top \mathcal{M})$$

Denne metode er frigjort fra en valgt parametrisering af et spektrum og derfor velegnet i forbindelse med arbejde i Delta domænet.

**Bemærkning 1** Vi kan som alternativ til (30) og (31) arbejde direkte i en parametrisering

$$\mathcal{R} = \mathcal{K}\mathcal{M}$$

og bestemme  $\mathcal{P}_{i+1}$  således at fejlen i parameterrummet

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{K}\mathcal{F}_i = \mathcal{R} - \mathcal{K}\mathcal{T}(\mathcal{P})\mathcal{H}\mathcal{P}$$

forsøges nulstilles i hver Newton iteration, dvs.

$$\mathcal{P}_{i+1} = \mathcal{P}_i - \mathcal{F}_i^{-1}\mathcal{E}_i$$

Her er:

$$\mathcal{F}_i = -\frac{1}{2}\mathcal{K}\mathcal{C}_i$$

den afledede af  $\mathcal{E}_i$  mht.  $\mathcal{P}$ . Denne frestilling er mere på linie med beskrivelsen af Newton-Raphson metoden i [4].  $\square$

Den angivne algoritme har mange behagelig egenskaber der for forskellige domainer er angivet f.eks. i [33], [31] eller [20]. Nedenstående sætning angiver resultaterne for alle fire domainer under et.

**Sætning 4.1** Antag, at  $P_0(z)$  ikke har nulpunkter udenfor stabilitetsgrænsen. Da gælder at:

1.  $P_i$  og  $P_{i+1}$  har samme antal nulpunkter udenfor stabilitetsgrænsen.
2. på stabilitetsgrænsen er:

$$|P_i(s)| \geq |P(s)|$$

3. hvis  $M$  ikke har nulpunkter på stabilitetsgrænsen konverger sekvensen  $P_0, P_1, \dots$  uniformt mod løsningen til (24) udenfor stabilitetsgrænsen.
4. konvergen af sekvensen  $P_0, P_1, \dots$  er af kvadratisk natur.

□

**Bevis: Punkt 1.:** Vi kan relativt let omforme (28) til:

$$P_{i+1}(s)\tilde{P}_{i+1}(s) = [P_{i+1}(s) - P_i(s)][\tilde{P}_{i+1}(s) - \tilde{P}_i(s)] + M(s)$$

hvilket på stabilitetsgrænsen ( $\mathbb{S}$ ) betyder at:

$$|P_{i+1}(s)|^2 = |P_{i+1}(s) - P_i(s)|^2 + M(s) \quad s \in \mathbb{S} \quad (32)$$

Vi har dermed følgende ulighed gældende på stabilitetsgrænsen

$$|P_{i+1}(s)| \geq |P_{i+1}(s) - P_i(s)| \quad s \in \mathbb{S}$$

Denne ulighed giver sammen med Rouchè sætning (se f.eks. [1] side 9.56) sætningens punkt 1.

**Punkt 2.:** Sætningens punkt 2 følger direkte af (32) idet der for ethvert  $i$  gælder at:

$$|P_{i+1}(s)|^2 \geq |M(s)|^2 \quad s \in \mathbb{S}$$

på stabilitetsgrænsen. Størrelsen  $|P_{i+1}(s)|$  er følgelig begrænset nedadtil på stabilitetsgrænsen.

**Punkt 3.:** Fra (28) har vi (ved at dividere med  $\tilde{P}_i(s)P(s)$ ) at:

$$\frac{\tilde{P}_{i+1}(s)}{\tilde{P}_i(s)} + \frac{P_{i+1}(s)}{P_i(s)} = 1 + \frac{\tilde{P}(s)P(s)}{\tilde{P}_i(s)P_i(s)}$$

udenfor og på stabilitetsgrænsen. På stabilitetsgrænsen gælder at:

$$2\operatorname{Re} \left[ \frac{P_{i+1}(s)}{P_i(s)} \right] = 1 + \left| \frac{P(s)}{P_i(s)} \right|^2$$

eller at::

$$\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \left[ \frac{P_{i+1}(s)}{P_i(s)} \right] \leq 1 \quad (33)$$

på stabilitetsgrænsen. Der gælder desuden at:

$$\frac{P(s)}{P_i(s)} \rightarrow 1 \quad \text{for} \quad s \rightarrow \infty$$

Da  $\frac{P_{i+1}(s)}{P_i(s)}$  er analytisk udenfor og på stabilitetsgrænsen er specielt dens realdel harmonisk og er derfor enten konstant eller antager sit maximum og minimum på stabilitetsgrænsen. Udtrykket

(33) er derfor gyldigt udenfor og på stabilitetsgrænsen. Specielt gælder der på den reelle akse (udenfor og på stabilitetsgrænsen) at:

$$\frac{1}{2}P_i(s) < P_{i+1}(s) \leq P_i(s)$$

Da  $P_i(s)$  på det reelle udsnit udenfor (og på) stabilitetsgrænsen er monotont aftagende og begrænset nedadtil vil  $P_i(s)$  konvergerer mod et polynomie uden nulpunkter udenfor stabilitetsområdet og koefficienterne i  $P_i(s)$  vil konvergerer mod koefficienter i  $P(s)$ .  $P_i(s)$  vil uniform konvergerer mod  $P(s)$  overalt.

**Punkt 4.:** Inføres fejlen:

$$\mathcal{E}_i = P_i(s) - P(s)$$

kan vi let omforme (28) til:

$$\tilde{\mathcal{E}}_{i+1}P_i + \tilde{P}_i\mathcal{E}_{i+1} = \tilde{\mathcal{E}}_i\mathcal{E}_i$$

Udtrykt vektorielt har vi at:

$$[\mathcal{T}(\mathcal{P}_i)\mathcal{H} + \mathcal{T}(\mathcal{H}\mathcal{P}_i)]\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{T}(\mathcal{H}\mathcal{E}_i)\mathcal{E}_i$$

Defineres yderligere:

$$\mathcal{K}_i = \mathcal{T}(\mathcal{P}_i)\mathcal{H} + \mathcal{T}(\mathcal{H}\mathcal{P}_i)$$

og dennes fejl:

$$\mathcal{L}_i = \mathcal{K}_i - \mathcal{K}$$

har vi at:

$$[\mathcal{K} + \mathcal{L}_i]\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{T}(\mathcal{H}\mathcal{E}_i)\mathcal{E}_i$$

eller at:

$$[I + \mathcal{K}^{-1}\mathcal{L}_i]\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{K}^{-1}\mathcal{T}(\mathcal{H}\mathcal{E}_i)\mathcal{E}_i$$

Lad os undersøge udviklingen af normen  $\partial_t = |\mathcal{E}_t| = \sup_i |e_t^i|$  på fejlen. Vi har umiddelbart at

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}(\mathcal{H}\mathcal{E}_i)\mathcal{E}_i| &\leq |\mathcal{T}(\mathcal{H}\mathcal{E}_i)||\mathcal{E}_i| \\ &\leq (k+1)\partial_i^2 \end{aligned}$$

og med definitionen  $|\mathcal{K}^{-1}| = \mathcal{M}$  at

$$\begin{aligned} |[I + \mathcal{K}^{-1}\mathcal{L}_i]\mathcal{E}_{i+1}| &= |\mathcal{E}_{i+1} + \mathcal{K}^{-1}\mathcal{L}_i\mathcal{E}_{i+1}| \\ &\geq |\mathcal{E}_{i+1}| - |\mathcal{K}^{-1}||\mathcal{L}_i||\mathcal{E}_{i+1}| \\ &\geq [1 - \mathcal{M}|\mathcal{L}_i|]\partial_{i+1} \end{aligned}$$

Da nu

$$\mathcal{L}_i = [\mathcal{T}(\mathcal{P}_i) - \mathcal{T}(\mathcal{P})]\mathcal{H} + [\mathcal{T}(\mathcal{H}\mathcal{P}_i) - \mathcal{T}(\mathcal{H}\mathcal{P})]$$

er

$$|\mathcal{L}_i| \leq 2(k+1)\partial_i$$

Vi har nu for  $1 > 2\mathcal{M}(k+1)$  at

$$\partial_{i+1} \leq \frac{M(k+1)}{1 - 2M(k+1)\partial_i} \partial_i^2$$

hvormed sætningens sidste punkt er vist. □

**skalering**

I stedet for at betragte (6) direkte, hvor udgangspunktet er et givet  $M(s)$ , kan man behandle

$$\kappa^2 M(s) = (\kappa P(s)) (\kappa \tilde{P}(s))$$

hvor  $\kappa$  er valgt således at de indgående koefficienter er i et passende talområde. I implementeringerne i appendix B er valget:

$$\kappa^2 = \frac{2n+1}{\sqrt{\sum_{i=0}^{2n} m_i^2}}$$

anvendt i Z- og Delta domainet.

I [31] (og i [19]) foreslaas en skalering baseret på en variabeltransformation,

$$s = \beta\sigma$$

En sådan skalering er kun mulig i S- og Gamma domainet, fordi kun i disse domainer er stabilitetsgrænsen invariant for transformationen. I disse to domainer kan man med fordel operere med

$$\begin{aligned} \bar{M}(\sigma) &= \frac{1}{r_n} M(\beta\sigma) \\ &= (-1)^n \sigma^{2n} + \bar{r}_1 \sigma^{2n-2} + \dots + \bar{r}_{n-1} \sigma + 1 \end{aligned}$$

for

$$\beta = \sqrt{\lambda} \quad \lambda = \left( \frac{r_n}{|r_0|} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Her er anvendt den parametrisering der er beskrevet i kapitel 3.3 og 3.4. Hvis  $\bar{P}(\sigma)$  er resultatet af en spektralfaktorisering af  $\bar{M}(\sigma)$ , da findes  $P(s)$  simpelt ved

$$P(s) = \sqrt{r_n} \bar{P}\left(\frac{s}{\beta}\right)$$

### Initialisering

I forbindelse med initialisering af algoritmen angiver sætning 4.1, at hvis blot initial polynomiet,  $P_0$ , ikke har nulpunkter udenfor stabilitetsområdet da vil (de efterfølgende iterationer og) løsningen også have denne egenskab. Det gælder derfor at finde et initial polynomie med denne egenskab og som ligger tæt på det resulterende. Den sidste egenskab kan være svær at opfylde i praksis. I visse situationer, f.eks. i forbindelse med adaptiv regulering, kan et sådant gæt eksistere. I modsat fald må man anvende mere generelle retningslinier.

I Z-domainet er  $P_a(s) = \sqrt{r_0} s^n$  et polynomie med alle rødder indenfor stabilitetsområdet. En enkelt iteration ifølge algoritmen giver

$$P_0(s) = (r_0 s^n + \dots + r_n) \frac{1}{\sqrt{r_0}}$$

der i [12] og [30] angives som et rimeligt initialiseringspunkt.

I S- og Gamma domainet er forholdene ret gundstige idet

$$M(s) = r_0 \prod_{i=1}^n (s - z_i)(s + z_i) \quad \Re z_i \leq 0$$

hvorved:

$$M(0) = r_0 (-1)^n \prod_{i=1}^n |z_i|^2 = r_n$$

Der er derfor muligt at bestemme det geometriske midtpunkt,

$$\varrho = \left( \prod_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{n}}$$

af polerne i venstre halvplan. Operationen er speciel nem efter tidligere omtalte normering, hvor  $\varrho = 1$ . Et passende (og ifølge erfaringerne meget godt) startpunkt er

$$P_0(s) = \sqrt{(-1)^n r_0} (s - \varrho)^n$$

I Delta domainet kan man enten anvende den tætte knytning mellem Delta og S domainet for hurtig sampling og bruge det samme initialiserings punkt. Eller også kan man i lighed med Z-domainet anvende

$$P_0(s) = \kappa \left( s - \frac{1}{h} \right)^n$$

hvor  $\kappa$  er passende valgt konstant.

## 5 Konklusion

I denne rapport er egenskaberne ved spektralfaktorisering angivet for det tidskontinuere og tre tidsdiskrete domainer. To af de sidstnævnte har tætte relationer til det tidskontinuere, specielt under hurtig sampling.

Mange af de algoritmer man kan finde beskrevet i litteraturen er baseret på studier af en bestemt parametrisering af et spektrum i et givet domaine. Disse parametriseringer og deres indbyrdes relationer er diskuteret. I denne rapport er der angivet en Newton-Raphson baseret metode til numerisk løsning af spektralfaktoreringen, når en given parametrisering er anvendt. Metoden er fælles for de fire undersøgte domaiener. Der er desuden angivet en metoder, der ikke er baseret på en bestemt parametrisering. Til gengæld anvendes en projektion.

## 6 Acknowledgement

Arbejdet har været støttet af STVF (Statens Teknisk Videnskabelige Forskningsråd) under sagsnummer 9800576.

## A Procedurer

Der er udviklet følgende Matlab procedurer til spektralfaktorisering i relevante domainer.

```
sfakd.m % Delta domain
sfakdg.m % Delta domain ved transformation til Gamma
sfaks.m % S domain
sfakg.m % Gamma domain (samme som s)
sfakz.m % Z domain
sfakzg.m % Z domain ved transformation til Gamma dom.
sfakzz.m % Z domain ved nulpunktsortering
```

Hvis  $M$  angiver et spektrum anvendes procedurene ved følgende syntaks (for  $Z$  domainet)

```
C=sfakz(M)
```

eller

```
C=sfakz(M,P)
```

hvor  $C$  er det resulterende polynomie og  $P$  er et initialgæt.

Derudover er der udviklet en række procedurer til transformation mellem de aktuelle fire domainer.

```
pol2d2g.m
pol2q2d.m
pol2q2g.m
pol2z2d.m
pol2z2g.m
```

samt et sæt procedure til studie af reflektionen.

```
[Ar,H]=polrfl(A,dom,ts)
H=refl(n,dom,ts)
[D,K,Q,H,Ta,Tar]=hil(A,dom,ts)
```

hvor  $Ar$  er det reflekterede polynomium af  $A$  i domaine afgjort om  $dom=q,s,d,g$ . Videre er  $H=\mathcal{H}$ ,  $D=\mathcal{D}$ ,  $K=\mathcal{K}$ ,  $Q=\mathcal{Q}$ ,  $Ta=\mathcal{T}(\mathcal{A})$  og endelig  $Tar=\mathcal{T}(\mathcal{H}\mathcal{A})$ . Sampling periode  $ts$  skal kun angives i Delta domainet. Til spektral multiplikation

$$M = A\tilde{B}$$

kan anvendes polsmul med syntaksen

```
[M,H,Ta]=polsmul(A,B,dom,ts)
```

Til addition mellem to stationære stokastiske processer (med rationelt spektrum) er der udviklet proceduren `ssysadd`, der bruges paa følgende måde:

```
[A,C,v]=ssysadd(A1,C1,v1,A2,C2,v2)
```

hvor  $A,C$  er tæller og nævnerpolynomier og  $v$  er dritstøjens varians.



```

function c=sfakz(m,p);
%
%Usage: c=sfakz(m)
%
% or:
%
%      c=sfakz(m,p)
%
%Solves the spectrakfactorization problem:
%
%      C(z)C(z^{-1})=M(z)
%
%where:
%
%      C(z^{-1})=c_{0}+c_{1}z^{-1}+ ... + c_{n}z^{-n}
%
%      M(z)=r_{n}z^{n}+ ... + r_{0} + ... + r_{n}z^{-n}
%
%Inputs:
%
% m: [r_{n}, ..., r_{1}, r_{0}, r_{1} ... r_{n}]'
% p: Initial guess on C. Optional
%
%Output:
%
% c: [c_{0} c_{1} ... c_{n}]'

tol=1.0e-12;dp=tol+1;

im=max(size(m)); n=(im-1)/2; in=n+1;
%-----
% Skalering
%-----
sc=im/sqrt(m*m'); m=sc*m; m0=m(in);
%-----
cv=2*m(:);
if nargin<2, p=m(in:im)/sqrt(m(in)); end;
p=sqrt(sc)*p(:);

h=zeros(in,in);
for i=1:in,
    h(i,n+2-i)=1;
end

iter=0; maxiter=100;
while dp>tol & iter<maxiter,
    iter=iter+1;
    if iter==maxiter, disp('stop by number'); end;

    pr=h*p;
    m1=zeros(im,in); m2=m1;
    for i=1:in,
        m1(i:n+i,i)=p;
        m2(i:n+i,i)=pr;
    end

    a=m2+m1*h;
    x=inv(a'*a)*a'*cv;
    p=0.5*(p+x);
    dp=abs(p'*p-m0);
end
%-----
% DeSkalering
%-----
sc=1/sqrt(sc); c=sc*p(:)';
%-----

```

## B Binomialrækken

Til udledning af sammenhænge mellem polynomier i de omtalte domainer udgør binomialrækken:

$$(1+x)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i \quad (34)$$

et meget vigtigt redskab. Her er

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \quad (35)$$

hvor

$$n! = n(n-1) \cdots 1 \quad n \geq 1 \quad (36)$$

Specielt er  $0! \equiv 1$ . Regneregelen

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \quad (37)$$

leder til Pascal's trekant

				1			
			1	1			
		1	2	1			
	1	3	3	1			
	1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1		

der indgår i transformationsmatricerne (16), (17) og (22).

## References

- [1] N.C. Albertsen, P.L. Christiansen, and S. Christiansen. *Komplekse Variable i fysikken*. Polyteknisk Forlag, 1991.
- [2] K. J. Åström. *Introduction To Stochastic Control Theory*. Academic Press, 1970.
- [3] K. J. Åström, H. Hagander, and J. Sternby. Zeroes of a sampled systems. *Automatica*, 20(1):31–38, 1984.
- [4] V.A. Barker and Ole Tingleff. Numerisk løsning af ikke-lineære ligninger, 1991.
- [5] M.A. Garnero, G. Thomas, B. Caron, J. F. Bourgeois, and E. Irving. Identification pseudo-continue application a la commande adaptive a placement de poles par l'operateur delta. *APII*, 26(147):147–166, 1992.
- [6] M. Gevers and L. Gang. *Parametrizations in Control, Estimation and Filtering Problems*. Springer-Verlag, 1993.
- [7] G. Goodwin and Lozano. A rapprochement between continuous and discrete model reference adaptive control. *Automatica*, 22(2):199–207, 1986.
- [8] M. A. Hersh. The zeros and poles of delta operator systems. *International Journal of Control*, 57(3):557–575, 1993.
- [9] H. Elbønd Jensen. *Matematisk Analyse, del 1*. MI, 1975.
- [10] Jørgen Jessen. Realisering af diskrete overføringsoperatorer ved hjælp af d-transformationen. Technical report, Servolaboratoriet, Danmarks Tekniske Højskole, 1976. delta.
- [11] S. T. Juliusson. CACE af adaptive reguleringsystemer. nr 48, Department of Mathematical Modelling, 1994. English title: CACE of adaptive control systems.
- [12] V. Kučera. *Linear Control Systems*. Wiley-Interscience, 1979.
- [13] Morten Bach Lauritsen. Robust adaptive control. nr. 8, Institute of Mathematical Statistics and Operations Research, 1994.
- [14] R. Middleton and G. Goodwin. *Digital Control And Estimation, A unified Approach*. Prentice Hall, 1990.
- [15] R.H. Middleton and G.C. Goodwin. Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(11):1015–1021, 1986.

- 
- [16] C. Mohtadi. *Numerical Algorithms in Self-Tuning Control*, volume 35 of *IEE Control Engineering Series: Implementation of Self-Tuning Controllers* (ed.: K. Warwick), chapter 4, pages 67–95. Peter Peregrinus Ltd., 1988.
- [17] C. P. Neuman. Properties of the delta operator model of dynamic physical systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 23(1):296–301, 1993.
- [18] K. Premaratne, R. Salvi, N.R. Habib, and J.P. LeGall. Delta-operator formulated discrete time approximations of continuous-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(3):581–585, 1994.
- [19] Morten Rostgaard. *Modelling, Estimation and Control of Fast Sampled Dynamical Systems*. PhD thesis, Department of Mathematical Modelling (IMM), The Technical University of Denmark, Build. 321, DK-2800 Lyngby, Denmark, 1995.
- [20] Morten Rostgaard, Niels kjølstad Poulsen, and Ole Ravn. Spectral factorization using the delta operator. *Systems and Control Letters*, 22(5):293–301, 1994. Also technical report no. 14/92, IMSOR, DTU.
- [21] Morten Rostgaard, Niels Kjølstad Poulsen, and Ole Ravn. General predictive control using the delta operator. In *Proceedings of the 32th Conference on Decision and Control, San Antonio, Texas, USA*, volume 2, pages 1769–1774, 1993. Also Tecnical report 13/93, IMSOR, DTH.
- [22] T. Söderström. *Discrete-Time Stochastic Systems: Estimation and Control*. Prentice Hall, 1994.
- [23] T. Söderström and P. Stoica. *System Identification*. Prentice Hall, 1989.
- [24] C.B. Soh. Robust stability of discrete-time systems using delta operators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(3):377–380, 1991.
- [25] D.P. Stoten and A.J. Harrison. Generation of discrete and continuous time transfer function coefficients. *International Journal of Control*, 59(5):1159–1172, 1994.
- [26] T. Suzuki and K. Tanaka. Expression of generalized adaptive law using delta operator. *IFAC, Adaptive systems in Control and Signal Processing, Glasgow, UK*, pages 83–87, 1989.
- [27] Addisu Tesfaye and Masayoshi Tomizuka. Robust digital tracking with pertubation estimation via the euler operator. *International Journal of Control*, 63(2):239–256, 1996.
- [28] Bent G. Thygesen. *Modelling and Control of Systems in the Delta Domain*. PhD thesis, Institute of Mathematical Statistics and Operations Research (IMSOR), The Technical University of Denmark, Build. 321, DK-2800 Lyngby, Denmark, 1993.
- [29] Bent Georg Thygesen. Deltamodellering. nr. 23, Institute of Mathematical Statistics and Operations Research, B. 321, DK-2800 Lyngby, 1990. English title: Delta modelling.
- [30] Z. Vostrý. New algorithm for polynomial spektral factoryzation with quadratic convergense i. *Kybernetica*, 11(6):415–422, 1975.
- [31] Z. Vostrý. New algorithm for polynomial spektral factoryzation with quadratic convergense ii. *Kybernetica*, 12(4):248–259, 1976.
- [32] Chi-Hsu Wang and Mon-Yih Lin nad Ching-Cheng Teng. On the nature of the boxer-thaler and madwed integrators and their application in digitizing a continuous-time system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(10):1163–1168, 1990.
- [33] G.T. Wilson. Factorization of the covariance generating function of a pure moving average proces. *SIAM J. Numer. Anal.*, 6(1):1–7, 1969.
- [34] G.T. Wilson. The factorization of matricial spectral densities. *SIAM journal on Applied Mathematics*, 23(4):420–426, 1972.

