Sandsynlighedsregning
4. forelæsning

Bo Friis Nielsen

Anvendt Matematik og Computer Science

Danmarks Tekniske Universitet

2800 Kgs. Lyngby – Danmark

Email: bfni@dtu.dk

Dagens emner: Afsnit 3.3 og 3.4

- Varians/standardafvigelse

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{\text{alle } x} (x - E(X))^2 P(X = x)$$

- Normalfordelingsapproksimation/den Centrale Grænseværdisætning

$$P\left(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a)$$

- Markovs og Chebychevs uligheder for ekstreme udfald

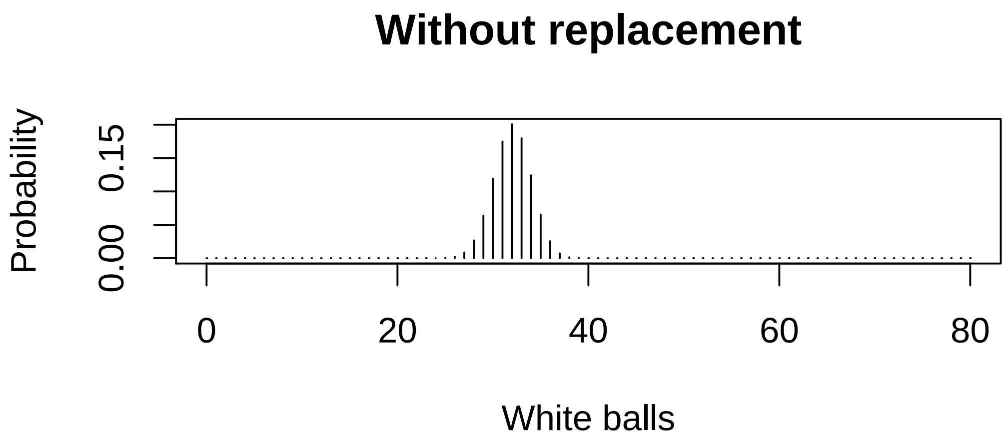
$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \qquad P(|X - E(X)| \geq k\mathrm{SD}(X)) \leq \frac{1}{k^2}$$

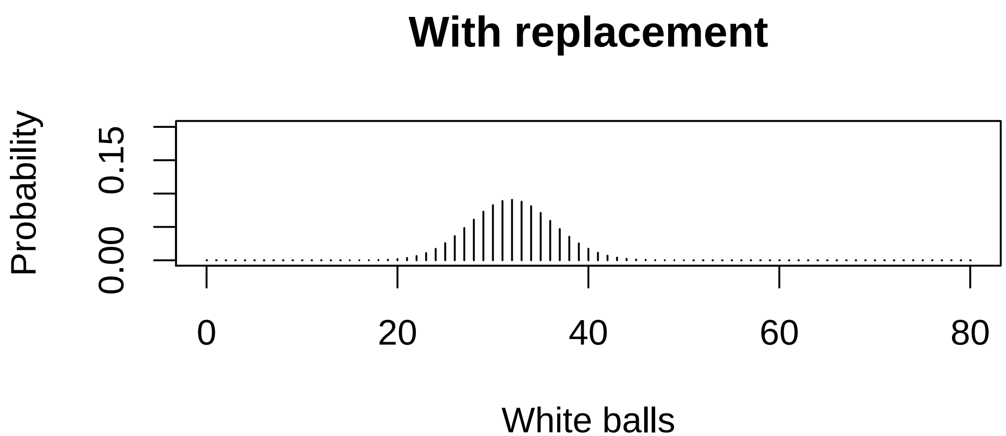
- Et udpluk af diskrete fordelinger

$$P(T = i) = (1-p)^{i-1}p \qquad P(Y_r = i) = \binom{i+r-1}{r-1} p^r (1-p)^i$$

- Indikatorfunktioner $I_A = \begin{cases} 1 & \text{hvis } A \text{ indtræffer} \\ 0 & \text{hvis } A^c \text{ indtræffer} \end{cases}$

Standardafvigelse/varians





Den hypergeometriske fordeling har mindre variation end binomialfordelingen.

Definition af varians

Definition af varians

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{\text{alle } x} (x - E(X))^2 P(X = x)$$

Definition af varians

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{\text{alle } x} (x - E(X))^2 P(X = x)$$

Beregningsformel for varians (vigtig) p.186

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Definition af varians

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{\text{alle } x} (x - E(X))^2 P(X = x)$$

Beregningsformel for varians (vigtig) p.186

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

"Shift and scale"

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$$

Definition af varians

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{\text{alle } x} (x - E(X))^2 P(X = x)$$

Beregningsformel for varians (vigtig) p.186

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

"Shift and scale"

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$$

Sum af *uafhængige* variable

Hvis $X_1, \ldots, X_n$ er uafhængige, så

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$$

Varians af et tal trukket fra en liste

Givet en liste af tal

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Lad X være en stokastisk variabel: Et tilfældigt element af listen.

$$E(X) = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

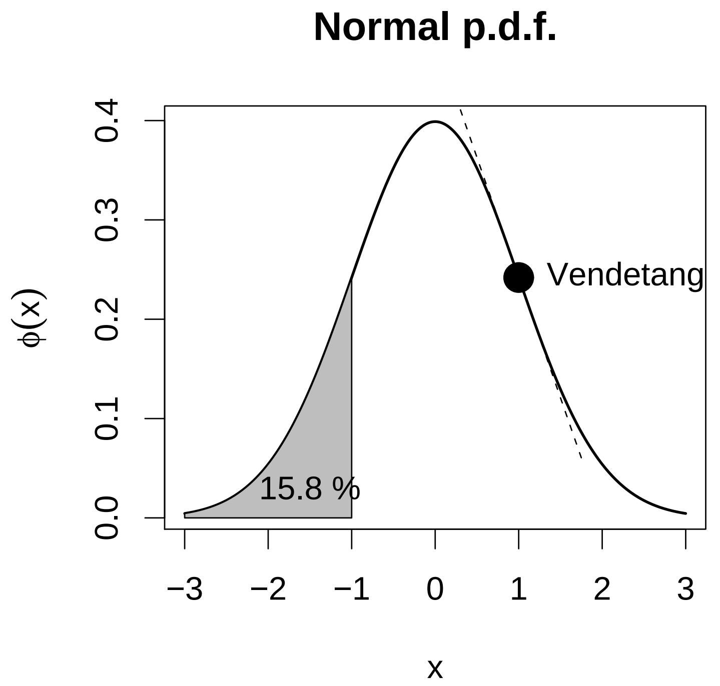
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$

Standardafvigelse

$$\mathrm{SD}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Standardafvigelse

$$\mathrm{SD}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$



"Shift and scale"

$$\mathrm{SD}(aX + b) = |a|\mathrm{SD}(X)$$

Bestem variansen i binomialfordelingen (n, p)

Bestem variansen i binomialfordelingen (n, p)

Først, skriv $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ som

Bestem variansen i binomialfordelingen (n, p)

Først, skriv $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ som

$$X = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{hvor} \quad X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$$

Bestem variansen i binomialfordelingen (n, p)

Først, skriv $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ som

$$X = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{hvor} \quad X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$$

Dernæst, variansen i en Bernoullifordeling (p):

Bestem variansen i binomialfordelingen (n, p)

Først, skriv $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ som

$$X = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{hvor} \quad X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$$

Dernæst, variansen i en Bernoullifordeling (p):

$$E(X_i) = p\ ,$$

Bestem variansen i binomialfordelingen (n,p)

Først, skriv $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ som

$$X = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{hvor} \quad X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$$

Dernæst, variansen i en Bernoullifordeling (p):

$$E(X_i) = p \ , \ E(X_i^2) = p \ ,$$

Bestem variansen i binomialfordelingen (n, p)

Først, skriv $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ som

$$X = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{hvor} \quad X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$$

Dernæst, variansen i en Bernoullifordeling (p):

$$E(X_i) = p\ ,\ E(X_i^2) = p\ ,\ \mathrm{Var}(X_i) = p(1-p)$$

Bestem variansen i binomialfordelingen (n, p)

Først, skriv $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ som

$$X = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{hvor} \quad X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$$

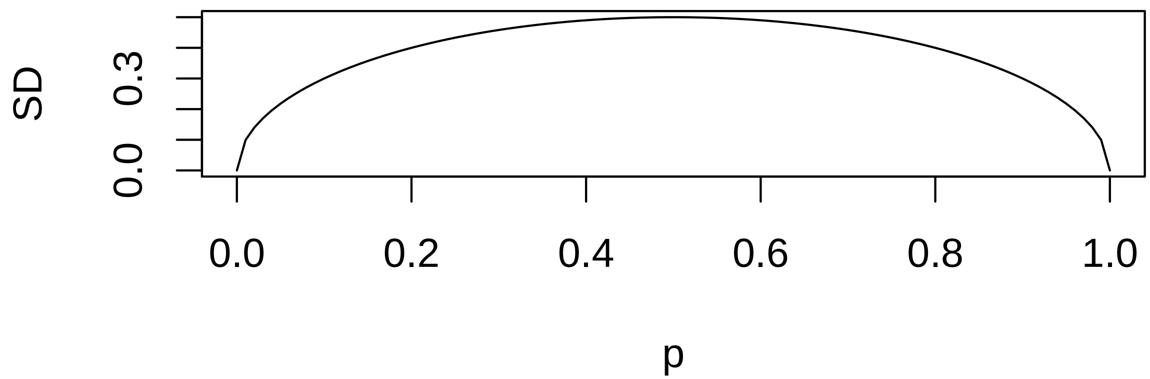
Dernæst, variansen i en Bernoullifordeling (p):

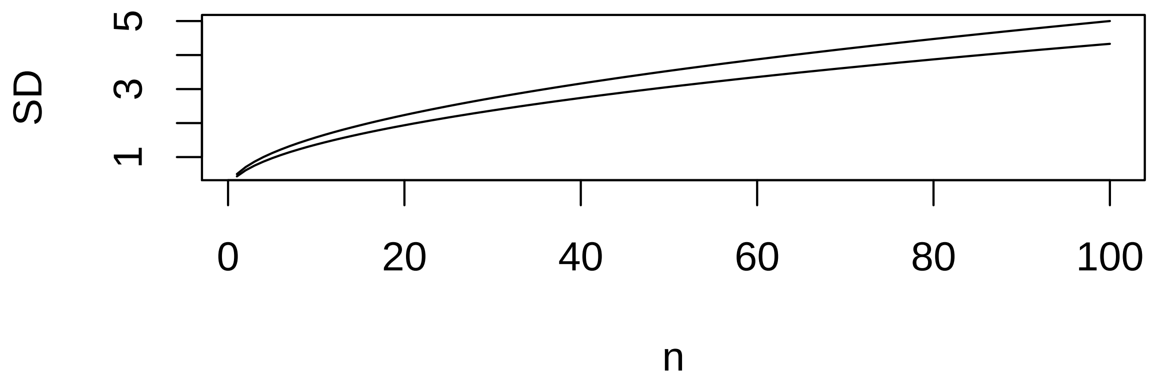
$$E(X_i) = p\ ,\ \ E(X_i^2) = p\ ,\ \ \mathrm{Var}(X_i) = p(1-p)$$

Kombinér:

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

Spredningen i binomialfordelingen (n, p)





Lad X være antallet af dage i en måned valgt tilfældigt blandt årets tolv måneder i et ikke-skudår. Det anføres at $E(X) = \frac{365}{12}$.

Spørgsmål 1

Man finder SD(X) til

1 ☐ 0.71

2 ☐ 0.76

3 ☐ 0.81

4 ☐ 0.86

5 ☐ 0.91

6 ☐ Ved ikke

Kvadratrodsloven

Lad X_i være I.I.D. (Independent and Identically Distributed).

Kvadratrodsloven

Lad X_i være I.I.D. (Independent and Identically Distributed).

Definér summen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

Kvadratrodsloven

Lad X_i være I.I.D. (Independent and Identically Distributed).

Definér summen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

Definér gennemsnittet $\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n$.

Kvadratrodsloven

Lad X_i være I.I.D. (Independent and Identically Distributed).

Definér summen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

Definér gennemsnittet $\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n$.

$$E(S_n)$$

Kvadratrodsloven

Lad X_i være I.I.D. (Independent and Identically Distributed).

Definér summen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

Definér gennemsnittet $\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n$.

$$E(S_n) = nE(X_i) \quad ,$$

Kvadratrodsloven

Lad X_i være I.I.D. (Independent and Identically Distributed).

Definér summen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

Definér gennemsnittet $\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n$.

$$E(S_n) = nE(X_i) \quad , \qquad \mathrm{SD}(S_n)$$

Kvadratrodsloven

Lad X_i være I.I.D. (Independent and Identically Distributed).

Definér summen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

Definér gennemsnittet $\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n$.

$$E(S_n) = nE(X_i) \quad , \qquad \mathrm{SD}(S_n) = \sqrt{n}\mathrm{SD}(X_i)$$

Kvadratrodsloven

Lad X_i være I.I.D. (Independent and Identically Distributed).

Definér summen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

Definér gennemsnittet $\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n$.

$$E(S_n) = nE(X_i) \quad , \qquad \mathrm{SD}(S_n) = \sqrt{n}\mathrm{SD}(X_i)$$

$$E(\bar{X}_n)$$

Kvadratrodsloven

Lad X_i være I.I.D. (Independent and Identically Distributed).

Definér summen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

Definér gennemsnittet $\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n$.

$$E(S_n) = nE(X_i) \quad , \qquad \mathrm{SD}(S_n) = \sqrt{n}\mathrm{SD}(X_i)$$

$$E(\bar{X}_n) = E(X_n)$$

Kvadratrodsloven

Lad X_i være I.I.D. (Independent and Identically Distributed).

Definér summen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

Definér gennemsnittet $\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n$.

$$E(S_n) = nE(X_i) \quad , \qquad \mathrm{SD}(S_n) = \sqrt{n}\mathrm{SD}(X_i)$$

$$E(\bar{X}_n) = E(X_n) \quad , \qquad \mathrm{SD}(\bar{X}_n)$$

Kvadratrodsloven

Lad X_i være I.I.D. (Independent and Identically Distributed).

Definér summen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

Definér gennemsnittet $\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n$.

$$E(S_n) = nE(X_i) \quad , \qquad \mathrm{SD}(S_n) = \sqrt{n}\mathrm{SD}(X_i)$$

$$E(\bar{X}_n) = E(X_n) \quad , \qquad \mathrm{SD}(\bar{X}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{SD}(X_n)$$

Store tals svage lov

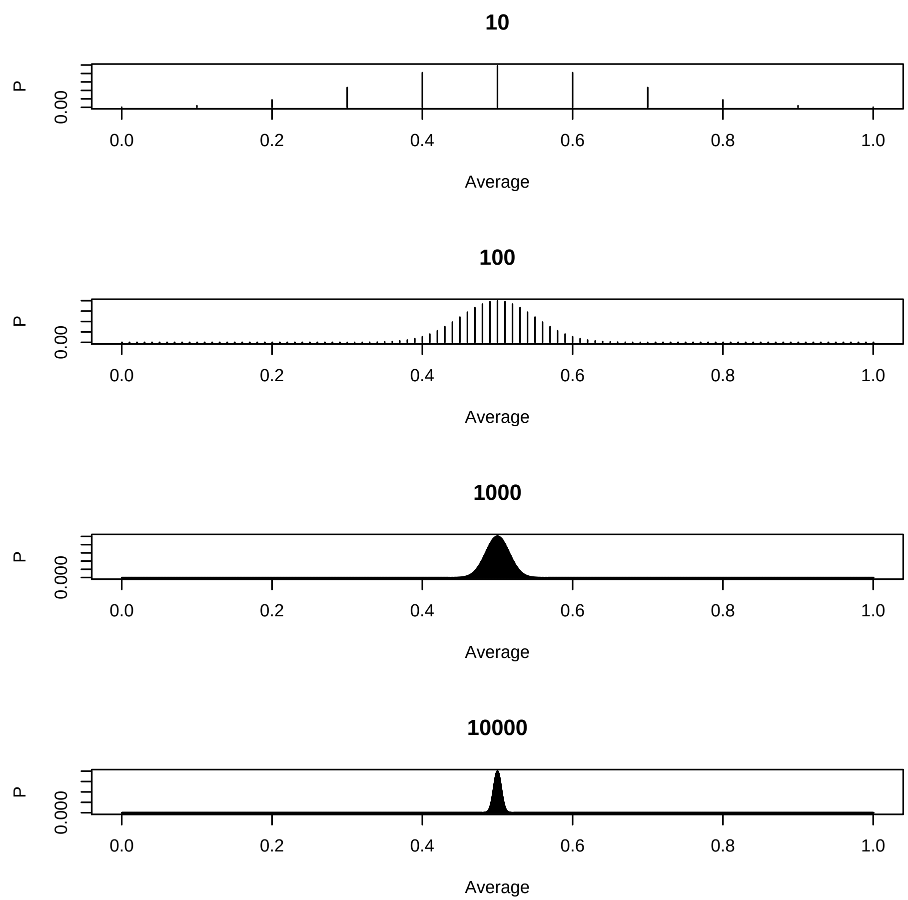
Lad X_i være I.I.D. med middelværdi μ og spredning σ.

$$\forall \epsilon > 0 :$$

$$n \to \infty \Rightarrow$$

$$P(|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon) \to 1$$

($\bar{X}_n$ konvergerer mod μ i sandsynlighed)



Den centrale grænseværdisætning p.196

Lad $X_1, \ldots, X_n$ være I.I.D. med middelværdi μ og varians σ^2.

Definér $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

For store n gælder approksimativt

$$P\left(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a)$$

Betydning

- CGS er et centralt resultat i sandsynlighedsregningen og statistikken (og findes i mange varianter)

Betydning

- CGS er et centralt resultat i sandsynlighedsregningen og statistikken (og findes i mange varianter)
- Budskabet er, at stokastiske variable, der er dannet gennem en sum af mange mindre bidrag, med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordeling

Betydning

- CGS er et centralt resultat i sandsynlighedsregningen og statistikken (og findes i mange varianter)
- Budskabet er, at stokastiske variable, der er dannet gennem en sum af mange mindre bidrag, med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordeling
- Vi har allerede set denne sætning i anvendelse for binomialfordelingen (og Poissonfordelingen)

Markovs ulighed p.174

Markovs ulighed p.174

- For ikke negative stokastiske variable, kan vi angive en øvre grænse for sandsynligheder ved brug af middelværdien.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Markovs ulighed p.174

- For ikke negative stokastiske variable, kan vi angive en øvre grænse for sandsynligheder ved brug af middelværdien.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Chebychevs ulighed p.191

Markovs ulighed p.174

- For ikke negative stokastiske variable, kan vi angive en øvre grænse for sandsynligheder ved brug af middelværdien.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Chebychevs ulighed p.191

- Hvis vi også kender variansen kan vi skærpe denne grænse

$$P(|X - E(X)| \geq k\mathrm{SD}(X)) \leq \frac{1}{k^2}$$

Om en stokastisk variabel X, der beskriver et rumindhold, oplyses det, at den har middelværdi $E(X) = 10$.

Spørgsmål 2

Den mindste øvre grænse for $P(X \geq 20)$ findes til

1 ☐ $\frac{1}{4}$

2 ☐ $\frac{1}{2}$

3 ☐ $\frac{3}{4}$

4 ☐ $1 - \Phi\left(\frac{20-10}{\sqrt{20}}\right)$

5 ☐ En sådan grænse kan ikke bestemmes ud fra det oplyste

6 ☐ Ved ikke

Hvor Φ som sædvanlig betegner fordelingsfunktionen for en standardiseret normalfordelt variabel.

Et udvalg af diskrete fordelinger

- En række grundlæggende mekanismer
- Se pp.475 “Distribution summaries”

Spørgsmål 3

Hvis en række tal c_i udgør en sandsynlighedsfordeling, hvad må der så gælde om c_i?

1 ☐ Der er ingen specifikke krav

2 ☐ $\sum_i c_i = 1$

3 ☐ c_i kan bestemmes fra en formel som $c_i = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$

4 ☐ $c_i \geq 0$

5 ☐ Ingen af de ovenstående er tilstrækkelige

6 ☐ Ved ikke

Den geometriske fordeling

Den geometriske fordeling

T : antal Bernoulli forsøg indtil første succes

Den geometriske fordeling

T : antal Bernoulli forsøg indtil første succes

$$P(T = i)$$

Den geometriske fordeling

T : antal Bernoulli forsøg indtil første succes

$$P(T = i) = (1 - p)$$

Den geometriske fordeling

T : antal Bernoulli forsøg indtil første succes

$$P(T = i) = (1 - p)^{i-1}$$

Den geometriske fordeling

T : antal Bernoulli forsøg indtil første succes

$$P(T = i) = (1 - p)^{i-1} p$$

Den geometriske fordeling

T : antal Bernoulli forsøg indtil første succes

$$P(T = i) = (1-p)^{i-1}p$$

$$P(T > i) = (1-p)^{i}$$

Den geometriske fordeling

T : antal Bernoulli forsøg indtil første succes

$$P(T = i) = (1 - p)^{i-1} p$$

$$P(T > i) = (1 - p)^{i}$$

Middelværdi

$$E(T)$$

Den geometriske fordeling

T : antal Bernoulli forsøg indtil første succes

$$P(T = i) = (1-p)^{i-1}p$$

$$P(T > i) = (1-p)^{i}$$

Middelværdi

$$E(T) = \sum_{i=0}^{\infty} P(T > i)$$

Den geometriske fordeling

T : antal Bernoulli forsøg indtil første succes

$$P(T = i) = (1-p)^{i-1}p$$

$$P(T > i) = (1-p)^{i}$$

Middelværdi

$$E(T) = \sum_{i=0}^{\infty} P(T > i) = \frac{1}{p}$$

Den geometriske fordeling

T : antal Bernoulli forsøg indtil første succes

$$P(T = i) = (1-p)^{i-1}p$$

$$P(T > i) = (1-p)^{i}$$

Middelværdi

$$E(T) = \sum_{i=0}^{\infty} P(T > i) = \frac{1}{p}$$

Varians

$$\mathrm{Var}(T)$$

Den geometriske fordeling

T : antal Bernoulli forsøg indtil første succes

$$P(T = i) = (1-p)^{i-1}p$$

$$P(T > i) = (1-p)^{i}$$

Middelværdi

$$E(T) = \sum_{i=0}^{\infty} P(T > i) = \frac{1}{p}$$

Varians

$$\mathrm{Var}(T) = \frac{1-p}{p^2},$$

Den geometriske fordeling

T : antal Bernoulli forsøg indtil første succes

$$P(T = i) = (1-p)^{i-1}p$$

$$P(T > i) = (1-p)^{i}$$

Middelværdi

$$E(T) = \sum_{i=0}^{\infty} P(T > i) = \frac{1}{p}$$

Varians

$$\mathrm{Var}(T) = \frac{1-p}{p^2}, \qquad SD(T)$$

Den geometriske fordeling

T : antal Bernoulli forsøg indtil første succes

$$P(T = i) = (1-p)^{i-1}p$$

$$P(T > i) = (1-p)^i$$

Middelværdi

$$E(T) = \sum_{i=0}^{\infty} P(T > i) = \frac{1}{p}$$

Varians

$$\mathrm{Var}(T) = \frac{1-p}{p^2}, \qquad SD(T) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$$

T_r Antal forsøg indtil r'te succes

Negativ binomialfordeling

- Y_r Antal fiaskoer til den r'te succes i en sekvens af Bernoulliforsøg
- Hvor mange kameraer skal vi kassere før vi får r, der passerer kvalitetskontrollen

$$T_r = Y_r + r$$

- (Har i øvrigt mange andre fortolkninger)

Spørgsmål 4

Hvad er middelværdi og varians for en $NB(r,p)$ fordeling?

1 ☐ $E(Y_r) = \frac{r(1-p)}{p}, \mathrm{Var}(Y_r) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

2 ☐ $E(Y_r) = \frac{r(1-p)}{p}, \mathrm{Var}(Y_r) = \frac{(1-p)}{p^2}$

3 ☐ $E(Y_r) = \frac{1}{p}, \mathrm{Var}(Y_r) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

4 ☐ $E(Y_r) = \frac{1}{p}, \mathrm{Var}(Y_r) = \frac{(1-p)}{p^2}$

5 ☐ $E(Y_r) = \frac{r}{p}, \mathrm{Var}(Y_r) = \frac{r}{p^2}$

6 ☐ Ved ikke

Negativ binomialfordeling udledning

Negativ binomialfordeling udledning

Antal fiaskoer før r'te succes.

Negativ binomialfordeling udledning

Antal fiaskoer før r'te succes.

En sekvens af Bernoulli forsøg: fffsffsfs

Negativ binomialfordeling udledning

Antal fiaskoer før r'te succes.

En sekvens af Bernoulli forsøg: fffsffsfs

Vi skal placere $r-1$ successer på $i+r-1$ forsøg før vores "endelige" succes.

Negativ binomialfordeling udledning

Antal fiaskoer før r'te succes.

En sekvens af Bernoulli forsøg: fffsffsfs

Vi skal placere $r-1$ successer på $i+r-1$ forsøg før vores "endelige" succes.

Derfor

Negativ binomialfordeling udledning

Antal fiaskoer før r'te succes.

En sekvens af Bernoulli forsøg: fffsffsfs

Vi skal placere $r-1$ successer på $i+r-1$ forsøg før vores "endelige" succes.

Derfor

$$P(Y_r = i)$$

Negativ binomialfordeling udledning

Antal fiaskoer før r'te succes.

En sekvens af Bernoulli forsøg: fffsffsfs

Vi skal placere $r-1$ successer på $i+r-1$ forsøg før vores "endelige" succes.

Derfor

$$P(Y_r = i) = \binom{i+r-1}{r-1}$$

Negativ binomialfordeling udledning

Antal fiaskoer før r'te succes.

En sekvens af Bernoulli forsøg: fffsffsfs

Vi skal placere $r-1$ successer på $i+r-1$ forsøg før vores "endelige" succes.

Derfor

$$P(Y_r = i) = \binom{i+r-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^i p$$

Negativ binomialfordeling udledning

Antal fiaskoer før r'te succes.

En sekvens af Bernoulli forsøg: fffsffsfs

Vi skal placere $r-1$ successer på $i+r-1$ forsøg før vores "endelige" succes.

Derfor

$$P(Y_r = i) = \binom{i+r-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^i p$$

$$= \binom{i+r-1}{r-1} p^r (1-p)^i$$

Middelværdi og varians

$$Y_r \sim NB(r,p)$$

Middelværdi og varians

$$Y_r \sim NB(r,p) \qquad Y_r = T_r - r \qquad T_r$$

Middelværdi og varians

$$Y_r \sim NB(r,p) \qquad Y_r = T_r - r \qquad T_r = W_1 + \cdots + W_r$$

Middelværdi og varians

$$Y_r \sim NB(r, p) \qquad Y_r = T_r - r \qquad T_r = W_1 + \cdots + W_r$$

hvor W_i er ventetiden fra den $i-1$te til den $i$te succes.

Middelværdi og varians

$$Y_r \sim NB(r,p) \qquad Y_r = T_r - r \qquad T_r = W_1 + \cdots + W_r$$

hvor W_i er ventetiden fra den $i-1$te til den $i$te succes.

W_i er IID; geometrisk (p) fordelt: Lad X_i være antallet af fiaskoer mellem succes $i-1$ og i.

Middelværdi og varians

$$Y_r \sim NB(r,p) \qquad Y_r = T_r - r \qquad T_r = W_1 + \cdots + W_r$$

hvor W_i er ventetiden fra den $i-1$te til den $i$te succes.
W_i er IID; geometrisk (p) fordelt: Lad X_i være antallet af fiaskoer mellem succes $i-1$ og i.

$$E(W_i) = \frac{1}{p}$$

Middelværdi og varians

$$Y_r \sim NB(r,p) \qquad Y_r = T_r - r \qquad T_r = W_1 + \cdots + W_r$$

hvor W_i er ventetiden fra den $i-1$te til den $i$te succes.
W_i er IID; geometrisk (p) fordelt: Lad X_i være antallet af fiaskoer mellem succes $i-1$ og i.

$$E(W_i) = \frac{1}{p} \qquad \mathrm{Var}(W_i) = \frac{1-p}{p^2}$$

Vi har da

$$Y_r = \sum_{i=1}^{r} X_i = \sum_{i=1}^{r}(W_i - 1) = \sum_{i=1}^{r} W_i - r$$

Middelværdi og varians

$$Y_r \sim NB(r,p) \qquad Y_r = T_r - r \qquad T_r = W_1 + \cdots + W_r$$

hvor W_i er ventetiden fra den $i-1$te til den $i$te succes.
W_i er IID; geometrisk (p) fordelt: Lad X_i være antallet af fiaskoer mellem succes $i-1$ og i.

$$E(W_i) = \frac{1}{p} \qquad \mathrm{Var}(W_i) = \frac{1-p}{p^2}$$

Vi har da

$$Y_r = \sum_{i=1}^{r} X_i = \sum_{i=1}^{r}(W_i - 1) = \sum_{i=1}^{r} W_i - r$$

Derfor:

Middelværdi og varians

$$Y_r \sim NB(r,p) \qquad Y_r = T_r - r \qquad T_r = W_1 + \cdots + W_r$$

hvor W_i er ventetiden fra den $i-1$te til den $i$te succes.
W_i er IID; geometrisk (p) fordelt: Lad X_i være antallet af fiaskoer mellem succes $i-1$ og i.

$$E(W_i) = \frac{1}{p} \qquad \mathrm{Var}(W_i) = \frac{1-p}{p^2}$$

Vi har da

$$Y_r = \sum_{i=1}^{r} X_i = \sum_{i=1}^{r}(W_i - 1) = \sum_{i=1}^{r} W_i - r$$

Derfor:

$$E(Y_r) = \frac{r}{p} - r$$

Middelværdi og varians

$$Y_r \sim NB(r,p) \qquad Y_r = T_r - r \qquad T_r = W_1 + \cdots + W_r$$

hvor W_i er ventetiden fra den $i-1$te til den $i$te succes.
W_i er IID; geometrisk (p) fordelt: Lad X_i være antallet af fiaskoer mellem succes $i-1$ og i.

$$E(W_i) = \frac{1}{p} \qquad \mathrm{Var}(W_i) = \frac{1-p}{p^2}$$

Vi har da

$$Y_r = \sum_{i=1}^{r} X_i = \sum_{i=1}^{r} (W_i - 1) = \sum_{i=1}^{r} W_i - r$$

Derfor:

$$E(Y_r) = \frac{r}{p} - r = r\frac{1-p}{p}$$

Middelværdi og varians

$$Y_r \sim NB(r,p) \qquad Y_r = T_r - r \qquad T_r = W_1 + \cdots + W_r$$

hvor W_i er ventetiden fra den $i-1$te til den $i$te succes.
W_i er IID; geometrisk (p) fordelt: Lad X_i være antallet af fiaskoer mellem succes $i-1$ og i.

$$E(W_i) = \frac{1}{p} \qquad \mathrm{Var}(W_i) = \frac{1-p}{p^2}$$

Vi har da

$$Y_r = \sum_{i=1}^{r} X_i = \sum_{i=1}^{r}(W_i - 1) = \sum_{i=1}^{r} W_i - r$$

Derfor:

$$E(Y_r) = \frac{r}{p} - r = r\frac{1-p}{p} \qquad \mathrm{Var}(Y_r)$$

Middelværdi og varians

$$Y_r \sim NB(r,p) \qquad Y_r = T_r - r \qquad T_r = W_1 + \cdots + W_r$$

hvor W_i er ventetiden fra den $i-1$te til den $i$te succes.

W_i er IID; geometrisk (p) fordelt: Lad X_i være antallet af fiaskoer mellem succes $i-1$ og i.

$$E(W_i) = \frac{1}{p} \qquad \mathrm{Var}(W_i) = \frac{1-p}{p^2}$$

Vi har da

$$Y_r = \sum_{i=1}^{r} X_i = \sum_{i=1}^{r}(W_i - 1) = \sum_{i=1}^{r} W_i - r$$

Derfor:

$$E(Y_r) = \frac{r}{p} - r = r\frac{1-p}{p} \qquad \mathrm{Var}(Y_r) = r\frac{1-p}{p^2}$$

Indikatorfunktionen (p.155), p.168

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{hvis } A \text{ indtræffer} \\ 0 & \text{hvis } A^c \text{ indtræffer} \end{cases}$$

Spørgsmål 5

Hvad er $E(I_A)$

1 ☐ 0.5

2 ☐ 1

3 ☐ A

4 ☐ $P(A)$

5 ☐ Kan man ikke sige generelt

6 ☐ Ved ikke

Hvornår kan man bruge indikatorfunktioner?

Hvornår kan man bruge indikatorfunktioner?

Man kan bruge indikatorfunktionen når vi kan skrive en stokastisk variabel X som

$$X = I_{A_1} + I_{A_2} + \cdots + I_{A_k}$$

Hvornår kan man bruge indikatorfunktioner?

Man kan bruge indikatorfunktionen når vi kan skrive en stokastisk variabel X som

$$X = I_{A_1} + I_{A_2} + \cdots + I_{A_k}$$

- dvs. X tæller, hvor mange af hændelser $A_1, \ldots, A_k$, der er indtruffet.

Hvornår kan man bruge indikatorfunktioner?

Man kan bruge indikatorfunktionen når vi kan skrive en stokastisk variabel X som

$$X = I_{A_1} + I_{A_2} + \cdots + I_{A_k}$$

- dvs. X tæller, hvor mange af hændelser $A_1, \ldots, A_k$, der er indtruffet.

$$E(X)$$

Hvornår kan man bruge indikatorfunktioner?

Man kan bruge indikatorfunktionen når vi kan skrive en stokastisk variabel X som

$$X = I_{A_1} + I_{A_2} + \cdots + I_{A_k}$$

- dvs. X tæller, hvor mange af hændelser $A_1, \ldots, A_k$, der er indtruffet.

$$E(X) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_k)$$

Hvornår kan man bruge indikatorfunktioner?

Man kan bruge indikatorfunktionen når vi kan skrive en stokastisk variabel X som

$$X = I_{A_1} + I_{A_2} + \cdots + I_{A_k}$$

- dvs. X tæller, hvor mange af hændelser $A_1, \ldots, A_k$, der er indtruffet.

$$E(X) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_k)$$

bruges når $P(A_i)$ kan bestemmes (let), men fordelingen af X ikke kan. (F.eks. opgave 3.2.14)

Opgave 3.3.8

Lad A_1, A_2 og A_3 være hændelser med sandsynlighederne

$$P(A_1) = \frac{1}{5}\,, \quad P(A_2) = \frac{1}{4}\,, \quad P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Opgave 3.3.8

Lad A_1, A_2 og A_3 være hændelser med sandsynlighederne

$$P(A_1) = \frac{1}{5}\ , \quad P(A_2) = \frac{1}{4}\ , \quad P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Lad N betegne antallet af disse hændelser, der indtræffer.

Opgave 3.3.8

Lad A_1, A_2 og A_3 være hændelser med sandsynlighederne

$$P(A_1) = \frac{1}{5}\ , \quad P(A_2) = \frac{1}{4}\ , \quad P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Lad N betegne antallet af disse hændelser, der indtræffer.

Opskriv N udtrykt ved indikatorvariable

Opgave 3.3.8

Lad A_1, A_2 og A_3 være hændelser med sandsynlighederne

$$P(A_1) = \frac{1}{5}\ , \quad P(A_2) = \frac{1}{4}\ , \quad P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Lad N betegne antallet af disse hændelser, der indtræffer.

Opskriv N udtrykt ved indikatorvariable

- Variablen I_B antager værdien 1,

Opgave 3.3.8

Lad A_1, A_2 og A_3 være hændelser med sandsynlighederne

$$P(A_1) = \frac{1}{5}\,, \quad P(A_2) = \frac{1}{4}\,, \quad P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Lad N betegne antallet af disse hændelser, der indtræffer.

Opskriv N udtrykt ved indikatorvariable

- Variablen I_B antager værdien 1, hvis B indtræffer,

Opgave 3.3.8

Lad A_1, A_2 og A_3 være hændelser med sandsynlighederne

$$P(A_1) = \frac{1}{5}\ ,\quad P(A_2) = \frac{1}{4}\ ,\quad P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Lad N betegne antallet af disse hændelser, der indtræffer.

Opskriv N udtrykt ved indikatorvariable

- Variablen I_B antager værdien 1, hvis B indtræffer, ellers 0.

Opgave 3.3.8

Lad A_1, A_2 og A_3 være hændelser med sandsynlighederne

$$P(A_1) = \frac{1}{5}\,, \quad P(A_2) = \frac{1}{4}\,, \quad P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Lad N betegne antallet af disse hændelser, der indtræffer.

Opskriv N udtrykt ved indikatorvariable

- Variablen I_B antager værdien 1, hvis B indtræffer, ellers 0.

$$N =$$

Opgave 3.3.8

Lad A_1, A_2 og A_3 være hændelser med sandsynlighederne

$$P(A_1) = \frac{1}{5}\ , \quad P(A_2) = \frac{1}{4}\ , \quad P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Lad N betegne antallet af disse hændelser, der indtræffer.

Opskriv N udtrykt ved indikatorvariable

- Variablen I_B antager værdien 1, hvis B indtræffer, ellers 0.

$$N = I_{A_1}$$

Opgave 3.3.8

Lad A_1, A_2 og A_3 være hændelser med sandsynlighederne

$$P(A_1) = \frac{1}{5}\ , \quad P(A_2) = \frac{1}{4}\ , \quad P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Lad N betegne antallet af disse hændelser, der indtræffer.

Opskriv N udtrykt ved indikatorvariable

- Variablen I_B antager værdien 1, hvis B indtræffer, ellers 0.

$$N = I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3}$$

Find $E(N)$

$$N = I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3}$$

Find $E(N)$

$$N = I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3}$$

Vi tager forventning på begge sider

Find $E(N)$

$$N = I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3}$$

Vi tager forventning på begge sider

$$E(N)$$

Find $E(N)$

$$N = I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3}$$

Vi tager forventning på begge sider

$$E(N) = E(I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3})$$

Find $E(N)$

$$N = I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3}$$

Vi tager forventning på begge sider

$$E(N) = E(I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3})$$

Dermed

$$E(N)$$

Find $E(N)$

$$N = I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3}$$

Vi tager forventning på begge sider

$$E(N) = E(I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3})$$

Dermed

$$E(N) = E(I_{A_1}) + E(I_{A_2}) + E(I_{A_3}) \qquad \text{Hvorfor?}$$

Find $E(N)$

$$N = I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3}$$

Vi tager forventning på begge sider

$$E(N) = E(I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3})$$

Dermed

$$E(N) = E(I_{A_1}) + E(I_{A_2}) + E(I_{A_3}) \qquad \text{Hvorfor?}$$

$$E(N)$$

Find $E(N)$

$$N = I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3}$$

Vi tager forventning på begge sider

$$E(N) = E(I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3})$$

Dermed

$$E(N) = E(I_{A_1}) + E(I_{A_2}) + E(I_{A_3}) \qquad \text{Hvorfor?}$$

$$E(N) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

Find $E(N)$

$$N = I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3}$$

Vi tager forventning på begge sider

$$E(N) = E(I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3})$$

Dermed

$$E(N) = E(I_{A_1}) + E(I_{A_2}) + E(I_{A_3}) \qquad \text{Hvorfor?}$$

$$E(N) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{47}{60}$$

Beregn $\mathrm{Var}(N)$ når

- A_1, A_2 og A_3 er gensidigt udelukkende
- A_1, A_2 og A_3 er uafhængige
- $A_1 \subset A_2 \subset A_3$

$\mathrm{Var}(N)$ når A_i er gensidigt udelukkende

I dette tilfælde har vi

$$P(N > 1) = 0$$

$$P(N = 1) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$\mathrm{Var}(N)$ når A_i er gensidigt udelukkende

I dette tilfælde har vi

$$P(N > 1) = 0$$

$$P(N = 1) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = E(N)$$

$\mathrm{Var}(N)$ når A_i er gensidigt udelukkende

I dette tilfælde har vi

$$P(N > 1) = 0$$

$$P(N = 1) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = E(N)$$

Eksperimentet er altså et Bernoullieksperiment og vi har

$$\mathrm{Var}(N)$$

$\mathrm{Var}(N)$ når A_i er gensidigt udelukkende

I dette tilfælde har vi

$$P(N > 1) = 0$$

$$P(N = 1) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = E(N)$$

Eksperimentet er altså et Bernoullieksperiment og vi har

$$\mathrm{Var}(N) = p(1 - p)$$

$\mathrm{Var}(N)$ når A_i er gensidigt udelukkende

I dette tilfælde har vi

$$P(N > 1) = 0$$

$$P(N = 1) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = E(N)$$

Eksperimentet er altså et Bernoullieksperiment og vi har

$$\mathrm{Var}(N) = p(1-p) = \frac{47}{60}\frac{13}{60} = 0,170 = 0,412^2$$

$\mathrm{Var}(N)$ når A_1, A_2 og A_3 er uafhængige

$\mathrm{Var}(N)$

$\mathrm{Var}(N)$ når A_1, A_2 og A_3 er uafhængige

$$\mathrm{Var}(N) = \mathrm{Var}(I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3})$$

$\mathrm{Var}(N)$ når A_1, A_2 og A_3 er uafhængige

$$\mathrm{Var}(N) = \mathrm{Var}(I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3}) = \mathrm{Var}(I_{A_1}) + \mathrm{Var}(I_{A_3}) + \mathrm{Var}(I_{A_3})$$

$\mathrm{Var}(N)$ når A_1, A_2 og A_3 er uafhængige

$$\mathrm{Var}(N) = \mathrm{Var}(I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3}) = \mathrm{Var}(I_{A_1}) + \mathrm{Var}(I_{A_3}) + \mathrm{Var}(I_{A_3})$$

For hver A_i har vi

$$\mathrm{Var}(I_{A_i}) = P(A_i) \cdot P(A_i^c)$$

$\mathrm{Var}(N)$ når A_1, A_2 og A_3 er uafhængige

$$\mathrm{Var}(N) = \mathrm{Var}(I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3}) = \mathrm{Var}(I_{A_1}) + \mathrm{Var}(I_{A_3}) + \mathrm{Var}(I_{A_3})$$

For hver A_i har vi

$$\mathrm{Var}(I_{A_i}) = P(A_i) \cdot P(A_i^c)$$

Altså

$$\mathrm{Var}(I_{A_1}) = \frac{1}{5}\frac{4}{5} = \frac{4}{25} \qquad \mathrm{Var}(I_{A_2}) = \frac{3}{16} \qquad \mathrm{Var}(I_{A_3}) = \frac{2}{9}$$

$\mathrm{Var}(N)$ når A_1, A_2 og A_3 er uafhængige

$$\mathrm{Var}(N) = \mathrm{Var}(I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3}) = \mathrm{Var}(I_{A_1}) + \mathrm{Var}(I_{A_3}) + \mathrm{Var}(I_{A_3})$$

For hver A_i har vi

$$\mathrm{Var}(I_{A_i}) = P(A_i) \cdot P(A_i^c)$$

Altså

$$\mathrm{Var}(I_{A_1}) = \frac{1}{5}\frac{4}{5} = \frac{4}{25} \qquad \mathrm{Var}(I_{A_2}) = \frac{3}{16} \qquad \mathrm{Var}(I_{A_3}) = \frac{2}{9}$$

Så

$$V(N) = \frac{2051}{3600} \approx 0,570 \approx 0.755^2$$

Beregn $\mathrm{Var}(N)$ når $A_1 \subset A_2 \subset A_3$

Beregn $\mathrm{Var}(N)$ når $A_1 \subset A_2 \subset A_3$

$$P(N = 3)$$

Beregn $\mathrm{Var}(N)$ når $A_1 \subset A_2 \subset A_3$

$$P(N = 3) = P(A_1) = \frac{1}{5}$$

Beregn $\mathrm{Var}(N)$ når $A_1 \subset A_2 \subset A_3$

$$P(N = 3) = P(A_1) = \frac{1}{5}$$

Vi har ved brug af differensreglen p.22

Beregn $\mathrm{Var}(N)$ når $A_1 \subset A_2 \subset A_3$

$$P(N = 3) = P(A_1) = \frac{1}{5}$$

Vi har ved brug af differensreglen p.22

$$P(N = 2)$$

Beregn $\mathrm{Var}(N)$ når $A_1 \subset A_2 \subset A_3$

$$P(N = 3) = P(A_1) = \frac{1}{5}$$

Vi har ved brug af differensreglen p.22

$$P(N = 2) = P(A_2 \backslash A_1)$$

Beregn $\mathrm{Var}(N)$ når $A_1 \subset A_2 \subset A_3$

$$P(N = 3) = P(A_1) = \frac{1}{5}$$

Vi har ved brug af differensreglen p.22

$$P(N = 2) = P(A_2 \backslash A_1) = P(A_2) - P(A_1) = \frac{1}{20}$$

Beregn $\mathrm{Var}(N)$ når $A_1 \subset A_2 \subset A_3$

$$P(N=3) = P(A_1) = \frac{1}{5}$$

Vi har ved brug af differensreglen p.22

$$P(N=2) = P(A_2 \backslash A_1) = P(A_2) - P(A_1) = \frac{1}{20}$$

$$P(N=1)$$

Beregn $\mathrm{Var}(N)$ når $A_1 \subset A_2 \subset A_3$

$$P(N=3) = P(A_1) = \frac{1}{5}$$

Vi har ved brug af differensreglen p.22

$$P(N=2) = P(A_2 \setminus A_1) = P(A_2) - P(A_1) = \frac{1}{20}$$

$$P(N=1) = P(A_3 \setminus A_2) = P(A_3) - P(A_2) = \frac{1}{12}$$

Beregn $\mathrm{Var}(N)$ når $A_1 \subset A_2 \subset A_3$

$$P(N=3) = P(A_1) = \frac{1}{5}$$

Vi har ved brug af differensreglen p.22

$$P(N=2) = P(A_2 \setminus A_1) = P(A_2) - P(A_1) = \frac{1}{20}$$

$$P(N=1) = P(A_3 \setminus A_2) = P(A_3) - P(A_2) = \frac{1}{12}$$

Dermed:

$$E(N^2)$$

Beregn $\mathrm{Var}(N)$ når $A_1 \subset A_2 \subset A_3$

$$P(N=3) = P(A_1) = \frac{1}{5}$$

Vi har ved brug af differensreglen p.22

$$P(N=2) = P(A_2 \backslash A_1) = P(A_2) - P(A_1) = \frac{1}{20}$$

$$P(N=1) = P(A_3 \backslash A_2) = P(A_3) - P(A_2) = \frac{1}{12}$$

Dermed:

$$E(N^2) = \frac{9}{5} + \frac{4}{20} + \frac{1}{12}$$

Beregn $\mathrm{Var}(N)$ når $A_1 \subset A_2 \subset A_3$

$$P(N=3) = P(A_1) = \frac{1}{5}$$

Vi har ved brug af differensreglen p.22

$$P(N=2) = P(A_2 \setminus A_1) = P(A_2) - P(A_1) = \frac{1}{20}$$

$$P(N=1) = P(A_3 \setminus A_2) = P(A_3) - P(A_2) = \frac{1}{12}$$

Dermed:

$$E(N^2) = \frac{9}{5} + \frac{4}{20} + \frac{1}{12} = \frac{119}{60}$$

Beregn $\mathrm{Var}(N)$ når $A_1 \subset A_2 \subset A_3$

$$P(N=3) = P(A_1) = \frac{1}{5}$$

Vi har ved brug af differensreglen p.22

$$P(N=2) = P(A_2 \backslash A_1) = P(A_2) - P(A_1) = \frac{1}{20}$$

$$P(N=1) = P(A_3 \backslash A_2) = P(A_3) - P(A_2) = \frac{1}{12}$$

Dermed:

$$E(N^2) = \frac{9}{5} + \frac{4}{20} + \frac{1}{12} = \frac{119}{60}$$

$$\mathrm{Var}(N)$$

Beregn $\mathrm{Var}(N)$ når $A_1 \subset A_2 \subset A_3$

$$P(N = 3) = P(A_1) = \frac{1}{5}$$

Vi har ved brug af differensreglen p.22

$$P(N = 2) = P(A_2 \backslash A_1) = P(A_2) - P(A_1) = \frac{1}{20}$$

$$P(N = 1) = P(A_3 \backslash A_2) = P(A_3) - P(A_2) = \frac{1}{12}$$

Dermed:

$$E(N^2) = \frac{9}{5} + \frac{4}{20} + \frac{1}{12} = \frac{119}{60}$$

$$\mathrm{Var}(N) = E(N^2) - (E(N))^2$$

Beregn $\mathrm{Var}(N)$ når $A_1 \subset A_2 \subset A_3$

$$P(N=3) = P(A_1) = \frac{1}{5}$$

Vi har ved brug af differensreglen p.22

$$P(N=2) = P(A_2 \backslash A_1) = P(A_2) - P(A_1) = \frac{1}{20}$$

$$P(N=1) = P(A_3 \backslash A_2) = P(A_3) - P(A_2) = \frac{1}{12}$$

Dermed:

$$E(N^2) = \frac{9}{5} + \frac{4}{20} + \frac{1}{12} = \frac{119}{60}$$

$$\mathrm{Var}(N) = E(N^2) - (E(N))^2 = \frac{4931}{3600} = 1,370 = 1,170^2$$

Beregn $\mathrm{Var}(N)$ når

A_1, A_2 og A_3 er gensidigt udelukkende $\quad \mathrm{Var}(N) = 0.412^2$

A_1, A_2 og A_3 er uafhængige $\quad \mathrm{Var}(N) = 0,755^2$

$A_1 \subset A_2 \subset A_3$ $\quad \mathrm{Var}(N) = 1,17^2$

Kan vi forklare/forstå resultatet?

Tail sum formula

Hvis X kan antage værdier $0, 1, \ldots$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i)$$

(En tilsvarende formel gælder for kontinuerte variable; kap. 4)

Tail sum formula

Hvis X kan antage værdier $0, 1, \ldots$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i)$$

(En tilsvarende formel gælder for kontinuerte variable; kap. 4)

Bevis:

$$X = I(A_1) + I(A_2) + \cdots$$

hvor

$$A_i = \{X \geq i\}$$

Et par nyttige sumformler

$$\sum_{i=0}^{N} a^i = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}, \qquad |a| \neq 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}, \qquad |a| < 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} = e^a$$

Et par nyttige sumformler

$$\sum_{i=0}^{N} a^i = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}, \qquad |a| \neq 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}, \qquad |a| < 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} = e^a$$

- For $a_i \geq 0$ og $b_i \geq 0$ har vi:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \qquad c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$$

Sammenhæng mellem fordelinger

- $X \sim \text{Bin}(n_1, p)$ og $Y \sim \text{Bin}(n_2, p)$: $X + Y \sim \text{Bin}(n_1 + n_2, p)$
- $X \sim \text{Pois}(\lambda_1)$ og $Y \sim \text{Pois}(\lambda_2)$: $X + Y \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$
- $X \sim \text{Geom}(p)$: $X - 1 \sim \text{NB}(1, p)$.
- $X \sim \text{NB}(r_1, p)$ og $Y \sim \text{NB}(r_2, p)$: $X + Y \sim \text{NB}(r_1 + r_2, p)$
- $\text{Bin}(n, \lambda/n) \to \text{Pois}(\lambda)$ når $n \to \infty$
- $\text{HyperGeom}(n, N, G) \to \text{Bin}(n, p)$ når $N, G \to \infty$ mens $G/N \to p$.
- Summer kan generelt approksimeres med normalfordelingen

Nye begreber i afsnit 3.3 og 3.4

- Varians og standardafvigelse
- Markovs og Chebychevs uligheder
- Indikatorfunktion
- Den centrale grænseværdisætning (3.3)
- Geometrisk fordeling
- Negativ binomial fordeling
- Poisson fordeling

Afsnit 3.3 og 3.4

- Varians/standardafvigelse

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{\text{alle } x} (x - E(X))^2 P(X = x)$$

- Normalfordelingsapproksimation/den Centrale Grænseværdisætning

$$P\left(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a)$$

- Markovs og Chebychevs uligheder for ekstreme udfald

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \qquad P(|X - E(X)| \geq k\mathrm{SD}(X)) \leq \frac{1}{k^2}$$

- Et udpluk af diskrete fordelinger

$$P(T = i) = (1-p)^{i-1}p \qquad P(T_r = i) = \binom{x + r - 1}{r - 1} p^{r-1}(1-p)^i p$$

- Indikatorfunktioner $I_A = \begin{cases} 1 & \text{hvis } A \text{ indtræffer} \\ 0 & \text{hvis } A^c \text{ indtræffer} \end{cases}$